

RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR INFORMATIK I



Daniel Lorenz

Einbettung ebener
Punktmengen in Graphen
niedriger Dilation

10. September 2005

Diplomarbeit

Betreuer: Prof. Dr. Rolf Klein

ABSTRACT

Sei S eine Punktmenge in der Ebene. Was ist die niedrigste Dilation eines Graphen der S enthält?

Folgende Schranken werden in dieser Arbeit behandelt:

1. Falls die Punktmenge S aus fünf Punkten besteht, die gleichmäßig auf dem Einheitskreis verteilt sind, ist 1.02040 eine obere Schranke.
2. Graphen mit beschränkter Flächengröße haben eine Dilation von mindestens 1.001913. Graphen die eine geschlossene, konvexe Kurve einbetten, haben Dilation von mindestens 1.001916.
3. Für Graphen, die aus n Familien von parallelen Geraden mit Abstand a bestehen, gilt, dass Knoten mit Distanz $d > 2.62a$ eine Dilation von höchstens $\frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}}$ haben.

Schlüsselwörter: Dilation, planare Graphen, untere Schranke, obere Schranke

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	4
2. Einbettung eines regelmäßigen Fünfecks	8
3. Untere Schranke für Graphen mit beschränkter Flächengröße	12
3.1 Allgemeine Beweiskonstruktion	13
3.2 Punktepaar mit niedrigster Dilation im Fall 1	20
3.3 Punktepaar mit niedrigster Dilation im Fall 2 und 3	26
4. Dilation bei Familien von Geraden und Mindestabstand	35
4.1 Obere Schranke bei vielen Richtungen und Mindestabstand	37
4.2 Folgerungen	52
5. Ausblick	54
Literaturverzeichnis	55
Anhang	
Listing 1: Programm zur Parameteroptimierung des Graphen zur Einbettung eines regelmäßigen Fünfecks	56
Listing 2: Programm zur Parameteroptimierung zum Beweis einer oberen Schranke bei Graphen mit begrenztem Flächeninhalt	64

1. EINFÜHRUNG

Angenommen es soll ein Verkehrsnetz, zum Beispiel ein Schienennetz, geplant werden. Aufgrund der Bevölkerungsverteilung sind wichtige Knotenpunkte in diesem Verkehrsnetz vorgegeben, an denen dann Bahnhöfe sein sollen. Das Schienennetz, das geplant wird, soll die Bahnhöfe so miteinander verbinden, dass, wenn der Weg zwischen zwei beliebige Bahnhöfe betrachtet wird, der Weg zwischen den Bahnhöfen im Verhältnis zur Entfernung nur um einen möglichst kleinen Faktor unterschiedlich ist. Der Umweg, der in dem Schienennetz gemacht wird, wird also relativ zur Entfernung gemessen und sollte möglichst klein sein.

Formal kann man das Verkehrsnetz als Graph betrachten. Dabei sind die Bahnhöfe die Knoten, und die Bahnstrecken entsprechen den Kanten in dem Graphen. Vorgegeben sind mehrere Bahnhöfe, die durch eine endliche Punktmenge S in der Ebene repräsentiert werden. Das Verhältnis vom Weg im Schienennetz und der Entfernung zweier Bahnhöfe wird Dilation genannt. Gesucht wird also ein Graph $G = (V, E)$ der die Punktmenge S als Teilmenge seiner Knotenmenge enthält, und dessen Dilation möglichst klein ist. Formal lässt sich die Dilation folgendermaßen definieren:

Seien p und q zwei beliebige, verschiedene Knoten aus G . Und bezeichne $\xi(p, q)$ einen kürzesten Weg von p nach q in G . Dann wird die Dilation $\delta_G(p, q)$ folgendermaßen definiert:

$$\delta_G(p, q) = \frac{|\xi_G(p, q)|}{|pq|}$$

Dabei sei $|\cdot|$ die euklidische Länge. Die Dilation δ_G des Graphen G ist dann gegeben durch:

$$\delta_G = \sup_{p, q \in V, p \neq q} \delta_G(p, q)$$

Die Dilation δ_S einer Punktmenge S ist das Minimum der Dilation über alle Graphen die S enthalten, oder in Formeln:

$$\delta_S = \min\{\delta_G \mid S \subset G\}$$

Außer der graphentheoretischen Dilation, die hier definiert worden ist, gibt es noch die sogenannte geometrische Dilation. Die geometrische Dilation betrachtet nicht nur die Dilation zwischen Knoten des Graphen, sondern auch zwischen inneren Punkten von Kanten des Graphen. Dadurch lässt sich zum Beispiel ein Straßennetz modellieren, da man auf einer Straße an jeder Stelle der Straße seine Reise beginnen und beenden kann und nicht nur auf Kreuzungen. Diese Arbeit ist aber

ausschließlich auf die graphentheoretische Dilation beschränkt. Wenn in dieser Arbeit von Dilation geredet wird, ist immer die graphentheoretische Dilation gemeint. Arbeiten, die sich mit der geometrischen Dilation beschäftigen, sind [4], [5] und [6].

Man kann verschiedene Fragestellungen untersuchen. So wird in den Kapiteln 2 und 3 die Frage behandelt, ob es möglich ist, eine obere oder untere Schranke für den Wert der Dilation zu finden. Das heißt, es geht um die Frage: Was ist der niedrigste Wert für die Dilation, den man mindestens erreichen kann, und wie hoch muss der Wert der Dilation mindestens sein?

Die bestmögliche Dilation, die erreicht werden kann ist 1. Abbildung 1 zeigt endliche Graphen mit Dilation 1. Endliche Graphen mit Dilation 1 entsprechen von ihrer Struktur her einem der Graphen, die in Abbildung 1 gezeigt werden oder einer Teilmenge dieser Graphen.

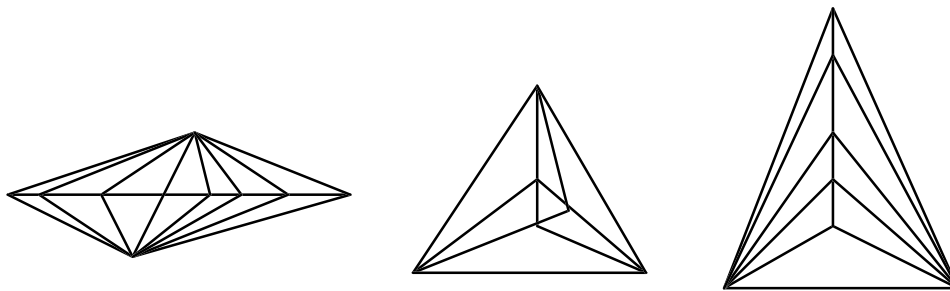


Abbildung 1: Graphen mit Dilation 1

Wenn man für eine Punktmenge, die keine Teilmenge eines Graphen aus Abbildung 1 ist, einfach den vollständigen Graphen über alle Punkte aus S verwendet, gibt es Kreuzungen von Kanten. Diese Kreuzungspunkte heißen Steinerpunkte. Lässt man keine Steinerpunkte zu ist ein Graph mit minimaler Dilation eine Triangulierung der Punktmenge S . Für dieses Problem ist eine obere Schranke bekannt. Die beste bekannte obere Schranke wurde von Keil und Gutwin [1] gefunden und beträgt 2.42. Auf diese Variante wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen, sondern es wird im weiteren immer davon ausgegangen, dass Steinerpunkte möglich sind. David Eppstein hat eine Zusammenstellung von grundlegenden Ergebnissen und Eigenschaften zur Dilation, wenn keine Steinerpunkte erlaubt sind, in einem Kapitel von „Spanning Trees and Spanners“ [7] veröffentlicht.

Erlaubt man Steinerpunkte, gehören sie genauso zur Knotenmenge von G , wie die Punkte aus S . Das heißt, auch die Dilation der Steinerpunkte untereinander oder zu Punkten aus S muss beachtet werden. Allerdings dürfen nur endlich viele zusätzlichen Knoten zusätzlich zu S verwendet werden. Mit unendlich vielen Punkten lässt sich jede Punktmenge in einen Graph mit Dilation 1 einbetten,

indem man den vollständigen Graphen über allen Punkten der Ebene verwendet.

Sollen zum Beispiel die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks in einen Graphen eingebettet werden, dann ergibt der vollständige Graph über die 5 Eckpunkte wieder ein kleineres Fünfeck in der Mitte. In Kapitel 2 wird die Einbettung eines Fünfecks in einen endlichen Graphen genauer behandelt und eine neue obere Schranke für den Wert der Dilation gezeigt.

Für den allgemeinen Fall, also die Einbettung von endlich vielen Punkten in beliebiger Lage in einen endlichen Graphen, wurde von R. Klein et al. [2] eine obere Schranke von 1.1247 gefunden. Dabei wird ein unendlicher, periodischer Graph verwendet, der passend skaliert wird (siehe Abbildung 2). Danach wird ein Teilgraph, der die einzubettende Punktmenge enthält, so herausgeschnitten, dass es Rand des Graphen zu keiner höheren Dilation kommt.

Obwohl es, wie bereits erwähnt, nur bestimmte Graphen mit Dilation 1 gibt, waren bis vor kurzem noch keine unteren Schranken bekannt. R. Klein et al. stellen in der schon genannten Arbeit [2] auch eine untere Schranke für Graphen mit beschränktem Flächendurchmesser vor. Im dritten Kapitel wird näher auf die untere Schranke von Graphen mit beschränktem Flächendurchmesser eingegangen und ein Beweis für die untere Schranke von 1.001913 vorgestellt.

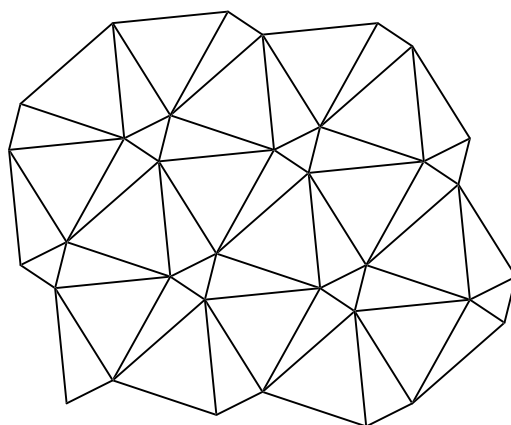


Abbildung 2: Periodischer Graph zur Einbettung beliebiger Punktmenge mit Dilation ≈ 1.1246

Die zweite bekannte untere Schranke, die ebenfalls in der Arbeit von R. Klein et al. [2] vorgestellt wird, gilt für Arrangements von Geraden in allgemeiner Lage. Bei diesem Problem lässt sich eine viel schärfere untere Schranke von $2/\sqrt{3}$ beweisen.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit geht es auch um Geraden – Arrangements. Angenommen, es wird auf eine gute Dilation „naher“ Punktepaaire verzichtet und nur die Dilation zwischen Punkten die einen gewissen Mindestabstand haben betrachtet, was lässt sich dann über die Dilation aussagen? Wenn beispielsweise ein Fernverkehrsnetz geplant wird, ist eventuell die Dilation für nahe Ziele zweitrangig. Wichtig ist, dass in der Größenordnung für die das Fernverkehrsnetz konzipiert ist, das Netz möglichst kurze Umwege macht.

Obwohl die Dilation der Arrangements von Geraden bei nahen Punkten nicht optimal ist, kann sie für weiter voneinander entfernte Punkte klein werden. Natürlich wird die Dilation für große Entfernungen um so kleiner, je dichter die Geraden liegen und je mehr verschiedene Richtungen es gibt. Deshalb wird für den Zusammenhang zwischen der Dilation δ , der Anzahl der Richtungen n und dem Abstand paralleler Geraden a folgendes Ergebnis bewiesen:

$$\delta(a, d, n) \leq \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2n}}$$

Dabei ist d der Abstand der Punkte.

Man kann die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden eines solchen Arrangements mit dem Einheitskreis als Geradendichte definieren. Die Geradendichte kann als die Menge an Baumaterial aufgefasst werden, welches benötigt wird, um einen Graphen mit entsprechender Dilation zu konstruieren.

Eine weitere interessante Frage, ist auch die algorithmische Komplexität der Berechnung der Dilation und der Konstruktion eines Graphen mit niedriger Dilation. So haben Eppstein und Wortman [3] die Algorithmische Komplexität untersucht, die die Berechnung der Dilation eines Sterns aus einer gegebenen Punktmenge besitzt und haben dafür einen $O(n \log n)$ -Zeit Algorithmus gefunden. Darauf aufbauend haben sie einen Algorithmus entwickelt, der in erwarteter Zeit von $O(n \log n)$ den optimalen Mittelpunkt im \mathfrak{R}^d zu findet.

2. EINBETTUNG EINES REGELMÄßIGEN FÜNFECKS

Sei S eine Punktmenge, die aus fünf Punkten besteht, die regelmäßig auf dem Einheitskreis verteilt sind. In diesem Kapitel wird eine neue obere Schranke für die Dilation dieser Punktmenge S gezeigt. Der vollständige Graph von S erzeugt fünf Steinerpunkte im inneren des Fünfecks, die wieder ein neues Fünfeck bilden (siehe Abbildung 3). Damit steht man rekursiv vor dem selben Problem die Eckpunkte des Fünfecks einzubetten, nur dass man jetzt zusätzlich die fünf Punkte des ursprünglichen Fünfecks auch noch berücksichtigen muss. Falls man einfach alle fünf Eckpunkte mit dem Mittelpunkt verbindet, (siehe Abbildung 3) erhält man einen Graph, dessen Dilation ungefähr 1.05146 beträgt.

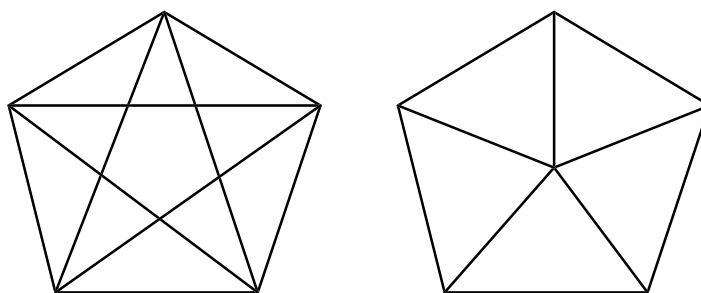


Abbildung 3: Einbettung des Fünfecks. Rechts der vollständige Graph der ein neues Fünfeck erzeugt, links ein Graph mit Dilation ≈ 1.05146 bei dem alle Ecken mit dem Mittelpunkt verbunden sind.

Es geht aber noch besser, wie im Folgenden bewiesen wird:

Theorem 1: *Sei S eine Punktmenge, die aus fünf Punkten besteht, die regelmäßig auf dem Einheitskreis verteilt sind. Es existiert ein Graph mit einer Dilation von 1.02040, der S einbettet.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Punkte des Fünfecks auf dem Einheitskreis um den Ursprung liegen. Dabei liegt einer der Eckpunkte auf der X -Achse. Dieser Punkt wird A genannt, und die anderen Punkte werden der Reihe nach gegen den Uhrzeigersinn in alphabetischer Reihenfolge benannt; siehe Abbildung 4.

Es wird jetzt ein Graph G konstruiert, der S einbettet und die gewünschte Dilation hat. Die konvexe Hülle des Fünfecks ist Teilmenge von G . In diesem Fünfeck befindet sich ein Drachen dessen Symmetrieachse auf der X -Achse liegt und dessen andere Diagonale um $-c$ verschoben, parallel zur Y -Achse verläuft. Die vier Eckpunkte des Drachens werden mit F, G, H, J benannt, wobei diese Punkte folgenden Koordinaten haben: $F = (d, 0)$, $G = (-c, b)$, $H = (-h, 0)$, $J = (-c, -b)$ mit den

Dilation an. Analog dazu geben *Ergebnis c*, *Ergebnis d*, *Ergebnis b*, *Ergebnis i*, jeweils den zugehörigen Parameterwert der besten Konfiguration an. Der Wertebereich gibt das Intervall an, aus dem Parameterwerte eingesetzt wurden.

Durchlauf Nr.	1	2	3	4	5
Dilation	1.02761	1.02115	1.02060	1.02056	1.02050
Schrittgröße	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.0001
Wertebereich b	-1 ... +1	0.1 ... 0.3	0.17 ... 0.19	0.179 ... 0.181	0.179 ... 0.181
Wertebereich c	-1 ... +1	0.0 ... 0.2	0.04 ... 0.06	0.047 ... 0.049	0.047 ... 0.049
Wertebereich d	-1 ... +1	0.3 ... 0.5	0.46 ... 0.48	0.478 ... 0.480	0.478 ... 0.492
Wertebereich h	-1 ... +1	0.1 ... 0.3	0.13 ... 0.15	0.143 ... 0.145	0.143 ... 0.145
Wertebereich i	c ... h	c ... h	c ... h	c ... 0.070	0.059 ... 0.061
Ergebnis b	0.2	0.18	0.180	0.1799	<i>0.1790</i>
Ergebnis c	0.1	0.05	0.048	0.0476	<i>0.0489</i>
Ergebnis d	0.4	0.47	0.479	<i>0.4800</i>	0.4862
Ergebnis h	0.2	0.14	0.144	0.1442	0.1444
Ergebnis i	0.1	0.06	0.060	0,0596	0.0601

Nr.	6	7	8
Dilation	1.020444	1.02040	1.02039
Schrittgröße	0.0001	0.0001	0.0001
Wertebereich b	0.177 ... 0.181	0.175 ... 0.178	0.175 ... 0.178
Wertebereich c	0.047 ... 0.049	0.048 ... 0.050	0.049 ... 0.051
Wertebereich d	0.478 ... 496	0.494 ... 0.500	0.499 ... 0.510
Wertebereich h	0.143 ... 0.145	0.145 ... 0.147	0.144 ... 0.146
Wertebereich i	0.059 ... 0.062	0.060 ... 0.062	0.060 ... 0.063
Ergebnis b	<i>0.1771</i>	0.1764	0.1761
Ergebnis c	<i>0.0489</i>	<i>0.0498</i>	0.0500
Ergebnis d	<i>0.4945</i>	<i>0.5000</i>	0.5019
Ergebnis h	<i>0.1450</i>	0.1452	0.1453
Ergebnis i	0.0612	0.0616	0.0618

Tabelle 1: Dilation und beste Parameter bei mehreren Durchläufen mit verschiedenen Schrittgrößen. Kursiv und fett sind die Parameter dargestellt, die vermutlich an ihre Bereichsgrenze gestoßen sind, so dass der nächste Durchlauf mit veränderten Bereichsgrenzen und gleicher Schrittgröße durchgeführt wurde.

Prinzipiell wurde die Schrittgröße um den Faktor 10 verkleinert und der Wertebereich ebenso. Außerdem wurde der Wertebereich über dem besten letzten Parameterwert zentriert. Ab dem vierten Durchlauf, gab es Parameter, die an der Bereichsgrenze lagen. Diese Parameter sind in der Tabelle kursiv und fett hervorgehoben. In diesen Fällen wurde die Schrittgröße beibehalten und nur die Wertebereiche der Parameter verändert.

Wie aus der Tabelle 1 ersichtlich ist, gibt es eine Parameterkonfiguration, so dass die Dilation des Graphen kleiner als 1.02040 ist. Damit ist das Theorem 1 bewiesen. \square

3. UNTERE SCHRANKE FÜR GRAPHEN MIT BESCHRÄNKTER FLÄCHENGRÖSSE

In Kapitel 2 wurde eine obere Schranke für die Einbettung eines speziellen Problems bewiesen. Es gibt auch eine obere Schranke des Dilationswertes für das allgemeine Problem, bei dem beliebige endliche Punktmengen in Graphen eingebettet werden. Die beste obere Schranke ist bisher von Klein et al. [2] gefunden worden und beträgt 1.1247. Dabei wurde ein unendlicher periodischer Graph verwendet, der entsprechend der einzubettenden Punktmenge S verkleinert oder vergrößert wurde; siehe Abbildung 2. Anschließend wurde ein Teilgraph mit der gewünschten Dilation herausgeschnitten.

In diesem Kapitel wird eine untere Schranke für unendliche Graphen mit beschränkter Flächengröße bewiesen. Alle periodischen, unendlichen Graphen haben eine beschränkte Flächengröße, so dass man damit eine untere Schranke für diese Graphentypen hat. Allerdings wurde noch keine untere Schranke größer als 1 für eine konkrete endliche Punktmenge bewiesen. Der Inhalt dieses Kapitels ist der Beweis folgenden Theorems:

Theorem 2: *Sei G ein unendlicher, planarer Graph. Der Durchmesser aller Flächen von G sei von oben durch eine Konstante beschränkt. Dann gilt für die Dilation δ_G von G : $\delta_G > 1.001913$.*

Anschließend wird noch ein Theorem bewiesen, das eine untere Schranke für die Einbettung einer geschlossenen, konvexen Kurve betrifft:

Theorem 3: *Sei C die Punktmenge einer geschlossenen, konvexen Kurve. Dann ist die Dilation durch $\delta_C > 1.001916$ beschränkt.*

Das Ergebnis basiert auf der schon genannten Arbeit von R. Klein et al. [2]. Darin wird eine untere Schranke von 1.00156 vorgestellt. Darauf aufbauend wird in Kapitel 3.1 die allgemeine Konstruktion des Beweises zu Theorem 2 und 3 vorgestellt. Dabei wird in zwei Fällen die Behauptung aufgestellt, dass die kleinstmögliche Dilation in diesem Fall bei einem speziellen Punktepaar auftritt, die aber in [2] nicht bewiesen werden. Für diese Behauptungen werden in Teil 3.2 und 3.3 Beweise vorgestellt.

3.1 ALLGEMEINE BEWEISKONSTRUKTION

In Abschnitt 3.1 wird die Beweiskonstruktion zu Theorem 2 vorgestellt. Aufbauend auf diesen Ergebnissen wird am Ende dieses Kapitels noch eine untere Schranke für eine geschlossene, konvexe Kurve bewiesen. Es wird mit einer Definition begonnen:

Definition 1: Sei G ein planarer Graph und R eine Fläche von G dessen Rand durch $\partial(R)$ gegeben ist. Ferner sei der Durchmesser von R definiert durch:

$$\text{diam}(R) = \sup\{|pq|; p, q \text{ Knoten von } R\},$$

wobei unbegrenzte Flächen unbegrenzten Durchmesser haben.

Sei R eine begrenzte Fläche von G und h_1, h_2 zwei Knoten von $\partial(R)$, so dass $|h_1h_2| = \text{diam}(R)$. Dann ist für jede positive Zahl r die r -Nachbarschaft von R , die Menge von Flächen aus G , die einen nichtleeren Schnitt mit der Kreisscheibe mit Radius r haben, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Strecke h_1h_2 liegt.

Der Kern von dem Beweis für Theorem 2 ist folgendes Lemma:

Lemma 2: Für jeder Parameter $c \in [1, 1.5]$ existieren zwei Zahlen $\rho > 1$ und $\delta > 1$, so dass folgendes gilt: Sei G ein planarer Graph G , der eine begrenzte Fläche R mit Durchmesser d enthält, so dass der Durchmesser aller Flächen in der ρd -Nachbarschaft von R , kleiner als cd ist. Dann hat G eine Dilation von mindestens δ .

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Fläche R den Durchmesser 1 besitzt. Außerdem kann angenommen werden, dass die Mitte des Durchmessers der Ursprung ist und der Durchmesser vertikal verläuft; siehe Abbildung 5. Da die Dilation einer Triangulierung von G nicht größer als die Dilation von G ist, wird auch angenommen, dass G eine Triangulierung der Knotenmenge ist.

Jetzt werden zwei Rechtecke links und rechts von R auf die X-Achse platziert. Die Rechtecke werden P_1, P_2 genannt. Sie haben die Höhe a und Länge c und sie liegen symmetrisch zur X-Achse in Entfernung $v \geq 0.5$ vom Ursprung. Die Werte der Parameter v und a werden später bestimmt.

Die Rechtecke P_1 und P_2 werden von zwei weiteren größeren Rechtecke B_1 und B_2 eingeschlossen. B_1, B_2 haben die Breite c und Höhe $2 \cdot c - a$ und sind jeweils symmetrisch zur X-Achse.

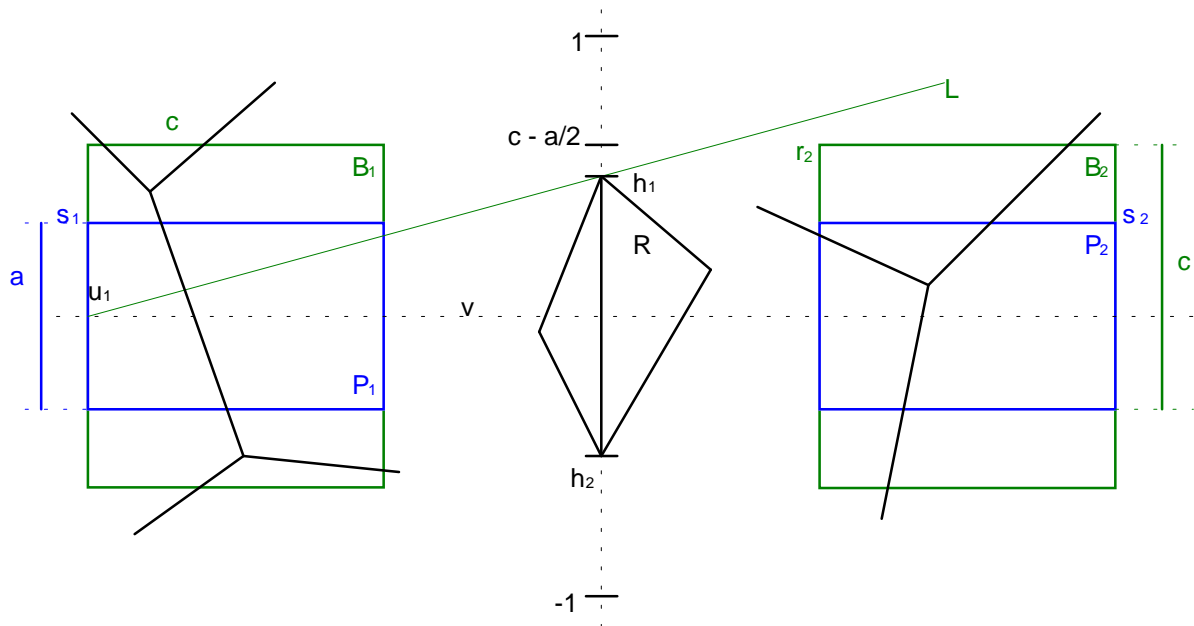


Abbildung 5: Konstruktion des Beweises für die untere Schranke von Graphen mit beschränkter Flächengröße

Angenommen der Durchmesser aller Flächen von G in der ρ -Nachbarschaft von R ist nicht größer als c , wobei $\rho := v + c$ gesetzt wird. Nun wird das Rechteck B_1 betrachtet, wobei dasselbe natürlich analog auch für B_2 gilt. Die Entfernung der rechten Eckpunkte von B_1 vom Ursprung ist kleiner als

$$\sqrt{v^2 + c^2} < \sqrt{(v + c)^2} = \rho.$$

Das bedeutet, dass die rechte Seite von B_1 vollständig in dem Kreis mit Radius ρ , dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, enthalten ist. Dadurch wird sichergestellt, dass die rechte Seite von B_1 nur Flächen schneidet, deren Durchmesser durch c beschränkt ist. Es können keine zwei Punkte existieren, von denen einer rechts und der andere links von B_1 liegt, die auf dem Rand derselben Fläche liegen, weil der Durchmesser dieser Fläche sonst größer als c wäre. Das heißt, die rechte und die linke Seite von B_1 müssen durch einen Kantenzug Z , der die obere und untere Seite von B_1 schneidet, von einander getrennt sein. Da aber eine Kante maximal die Länge c haben kann ist folgende Behauptung wahr:

Behauptung 3: Es gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

- Es gibt einen Knoten von G in P_1 oder
- zwei Knoten von G in $B_1 \setminus P_1$, wovon jeweils einer oberhalb und einer unterhalb von P_1 liegt.

Beweis: Angenommen es gäbe keinen Knoten in P_1 und keinen Knoten in der unteren Hälfte von B_1 . Dann müsste es Liniensegment in dem Kantenzug Z geben, das länger ist als

$$\frac{1}{2} (\text{Höhe von } P_1 + \text{Höhe von } B_1) = \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} = c.$$

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass die Kanten nicht länger als c sein dürfen. Womit die Behauptung bewiesen ist. Analog geht der Beweis, wenn kein Knoten in P_1 und kein Knoten in der oberen Hälfte von B_1 ist.

Jetzt wird untersucht, wie man die Parameter a und v wählen muss, um eine Dilation $\delta > 1$ zu erhalten. Offensichtlich muss jeder Weg, der zwei Punkte $p \in B_1$ und $q \in B_2$ verbindet, um die Fläche R herumgehen. Dieser Weg hat mindestens die Länge

$$\min(|ph_1| + |h_1q|, |ph_2| + |h_2q|).$$

Dabei müssen 3 Fälle unterschieden werden:

1. P_1 und P_2 enthalten jeweils mindestens einen Knoten von G . Wenn $a < 1$ ist, dann verursachen diese beiden Knoten eine Dilation $\delta > 1$.
2. $B_1 \setminus P_1$ und $B_2 \setminus P_2$ enthalten jeweils zwei Knoten von G . Dabei liegt jeweils ein Knoten oberhalb und einer unterhalb von P_1 bzw. P_2 . Sei p ein Knoten in der unteren Hälfte von B_1 und q in der oberen Hälfte von B_2 . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass der kürzeste Weg von p nach q oberhalb von R verläuft, sonst wird die Konstruktion um π gedreht, denn die Konstruktion ist drehsymmetrisch um den Ursprung. Die Länge der kürzesten Pfades von p nach q beträgt also mindestens $|ph_1| + |h_1q|$. Sei u_1 der Schnittpunkt der X -Achse mit der linken Rand von B_1 und sei r_2 der linke obere Eckpunkt von B_2 . Selbst wenn p und q in den extremen Positionen u_1 und r_2 wären, die in Abbildung 5 dargestellt sind, muss der Knoten r_2 unterhalb der Gerade L liegen, die durch die Punkt u_1 und h_1 geht, um eine Dilation $\delta > 1$ zu garantieren. Die Geradengleichung von L ist gegeben durch:

$$Y = \frac{1}{2 \cdot (v + c)} \cdot X + \frac{1}{2}$$

Es muss also sichergestellt werden, dass

$$\left(c - \frac{a}{2}\right) < \frac{1}{2 \cdot (v+c)} v + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a > 2c - 1 - \frac{v}{v+c} \text{ gilt.}$$

Zusammen mit der Bedingung $a < 1$ aus Fall 1 erhält man:

$$3 - 2c > a + 2 - 2c > \frac{c}{v+c} > 0.$$

3. Es gibt mindestens einen Knoten p in P_1 und zwei Knoten in B_2 , jeweils einen oberhalb und einen unterhalb von P_2 . Angenommen p liegt in der unteren Hälfte von P_1 , dann sei q ein Knoten aus G der in B_2 oberhalb von P_2 liegt. Dann ist die Argumentation dieselbe wie im zweiten Fall.

Offensichtlich können diese Bedingungen erfüllt werden falls $c \in [1, 1.5]$. Zuerst wird der Parameter $a \in]2c - 2, 1[$ ausgewählt, was sicher stellt, dass $3 - 2c > a + 2 - 2c > 0$ gilt, danach wird das $v \geq 0.5$ groß genug gewählt, dass auch

$$a + 2 - 2c > \frac{c}{v+c} > 0 \text{ gilt.}$$

Womit Lemma 2 bewiesen wäre. □

Um eine möglichst hohe untere Schranke zu beweisen, müssen die Parameterwerte gefunden werden, die die minimale Dilation aus allen 3 Fällen maximiert. Dabei werden der zweite und dritte Fall zusammengefasst, indem man jeweils die obere und untere Hälfte von B_1 bzw. B_2 betrachtet. Sei $p \in$ untere Hälfte von B_1 und $q \in$ obere Hälfte von B_2 das Punktepaar für das $|ph_1| + |h_1q|$ minimal wird. Dann ist $|ph_1| + |h_1q|$ auch eine untere Schranke von Fall 2 und 3, da in Fall 2 und 3 Teilmengen dieses zusammengefassten Falls betrachtet werden.

Im ersten Fall wird die Dilation minimal, falls sich die Knoten jeweils in der äußeren oberen oder unteren Ecken befinden. Also falls sie sich in den beiden oberen äußeren Ecken, die in Abbildung 5 s_1 und s_2 genannt sind, oder in den beiden unteren äußeren Ecken befinden. Dies wird in Kapitel 3.2 durch Lemma 6 bewiesen. Im zweiten und dritten Fall wird die Dilation minimal, wenn die einzigen Knoten in der linken oberen Ecke von B_2 und auf dem Schnittpunkt der linken Seite von B_1 mit der

X-Achse liegen. In Abbildung 5 sind diese Punkt u_1 und r_2 genannt. Dies wird in Kapitel 3.3 in Lemma 9 gezeigt.

Um die Parameteroptimierung für a und v durchzuführen und eine möglichst gute untere Schranke zu erhalten, wurde das Programm verwendet, das im Anhang in Listing 2 aufgeführt ist. Dabei wurden einfach mögliche Parameterwerte aus dem Wertebereich im Abstand 0.001 eingesetzt und die Mindestdilation ausgerechnet. Die Resultate der Berechnung sind in der Tabelle 2 aufgelistet. Dabei steht in der Spalte c jeweils der Wert von c . In der Spalte δ steht der Wert der Dilation für die beste Wahl der Parameter für das gegebene c . Anschließend werden die Werte a und v aufgelistet, bei denen dieser Dilationswert gefunden wurde. Zum Schluss wird noch der Wert für ρ gegeben.

C	δ	a	V	ρ
1.0	1.001916	0.794410	0.66	1.66
1.0001	1.001913	0.793305	0.669	1.6691
1.1	1.000538	0.843251	1.29	2.39
1.2	1.000121	0.887400	2.421	3.621
1.3	1.000017	0.928380	4.764	6.064
1.4	1.000001	0.965512	12.125	13.525

Tabelle 2: Numerische Werte der Berechnung der unteren Schranke

Damit kann jetzt Theorem 2 bewiesen werden. Gemäß der Annahme existiert ein endliches $\hat{d} := \sup\{diam(R) : R \text{ ist Fläche von } G\}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Fläche R für deren Durchmesser gilt: $diam(R) > (1 - \varepsilon) \cdot \hat{d}$. Aufgrund der Annahme gilt für jede Fläche R' von G , insbesondere derjenigen Flächen, die sich in einer ρ -Nachbarschaft für ein beliebiges ρ befinden:

$$diam(R') \leq \hat{d} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} \cdot diam(R) \leq 1.0001 \cdot diam(R), \text{ für ausreichend kleine } \varepsilon.$$

Also ist die Dilation des Graphen G mindestens 1.001913. □

Die untere Schranke in dieser Arbeit ist aus zwei Gründen etwas höher als in der zugrunde liegende Arbeit von Klein et al. [2]:

- Die Rechtecke B_1 und B_2 sind etwas schmaler
- Für v wird nicht $v > \sqrt{3}/2$, sondern nur $v \geq 0.5$ vorausgesetzt.

Mit Hilfe der Ergebnisse von Lemma 2 und Theorem 2 lässt sich eine weitere untere Schranke für die Einbettung einer geschlossenen, konvexen Kurve beweisen:

Theorem 3: Sei C die Punktmenge einer geschlossenen, konvexen Kurve. Dann ist die Dilation durch $\delta_c > 1.001916$ beschränkt.

Beweis: Die Beweiskonstruktion stammt aus einer Arbeit von Klein et al. [2]. Die höhere untere Schranke in dieser Arbeit im Vergleich zu der Arbeit von Klein et al, beruht auf der verbesserten unteren Schranke aus Lemma 1 und Theorem 2.

Angenommen man könnte eine Dilation ≤ 1.001916 erreichen, indem man einen endlichen Graph G zu C hinzufügt. Man kann davon ausgehen, dass G vollständig von C eingeschlossen ist, da aufgrund der Konvexität von C , Kanten außerhalb von C keine Abkürzung zwischen Punkten aus C bilden können. Sei R eine Fläche von G mit maximalem Durchmesser $d = |h_1 h_2| = 1$. Es wird dieselbe Beweiskonstruktion wie für Lemma 2 mit dem Parameter $c = 1.0$ verwendet; siehe Abbildung 6.

- 1) Falls weder B_1 noch B_2 vollständig außerhalb von C liegen, folgt aus Lemma 2 und den Werten aus Tabelle 2 die Behauptung.
- 2) Falls beide Rechtecke vollständig außerhalb von C liegen, muss es zwei Punkte aus C rechts und links von R auf der X-Achse geben, deren Abstand zum Ursprung kleiner als v ist. Mit $v = 0.66$ folgt, dass die Dilation mindestens folgenden Wert hat:

$$\delta_c > \frac{2 \cdot \sqrt{0.5^2 + 0.66^2}}{2 \cdot 0.66} > 1.25$$

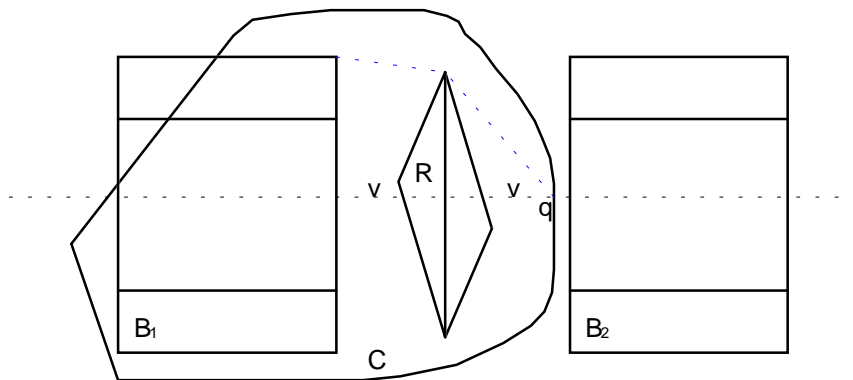


Abbildung 6: Konstruktion der unteren Schranke falls genau ein Rechteck außerhalb von C liegt

- 3) Falls genau ein Rechteck vollständig außerhalb von C liegt, gibt es einen Punkt von C auf dieser Seite von R auf der X -Achse, dessen Abstand zum Ursprung kleiner als v ist. In Abbildung 6 ist dieser Punkt q genannt. Auch in diesem Fall muss die Dilation größer sein als 1.001916, da Dilation größer sein muss als in der Konstellation s_1 zu s_2 oder u_1 zu r_2 (siehe auch Kapitel 3.2 und 3.3).

Damit ist Theorem 3 bewiesen.

□

3.2 PUNKTEPAAR MIT NIEDRIGSTER DILATION IM FALL 1

Im Kapitel 3.1 wurde der Beweis für die untere Schranke von Graphen mit beschränkter Flächengröße vorgestellt. Dabei fehlte allerdings noch der Beweis dafür, dass das Punktepaar $s_1 \in P_1$, $s_2 \in P_2$, minimale Dilation unter allen Punktepaaren $p \in P_1$, $q \in P_2$ hat. Seien s_1 und s_2 in den oberen, äußeren Ecken von P_1 und P_2 . Falls der kürzeste Pfad $\xi(p, q)$ über h_2 geht, wird die Konstruktion an der X-Achse gespiegelt.

Dazu wird ein beliebiges Punktepaar $p \in P_1$, $q \in P_2$ gewählt und dann gezeigt, dass $\delta_G(s_1, s_2) \leq \delta_G(p, q)$ gilt. Dabei wird in 4 Schritten vorgegangen; siehe Abbildung 7:

1. Das Dreieck p, q, h_1 wird um den Punkt h_1 um den Winkel α gedreht, dadurch erhält man die Punkte p_1 und q_1 , die beide auf einer Parallelen zu X-Achse liegen.
2. Falls p_1 oder q_1 weiter als $v + c$ von der Y-Achse entfernt liegen, wird das Dreieck p_1, q_1, h_1 um den Faktor ϕ geschrumpft, so dass die Entfernung von p_1 und q_1 von der Y-Achse nicht größer als $v + c$ ist. Dadurch erhält man die Punkte p_2, q_2 . Dabei muss sichergestellt werden, dass weder p_2 noch q_2 oberhalb der Geraden $Y = a/2$ liegen.
3. Sei p_3 der Schnittpunkt Geraden $Y = a/2$ mit der Parallelen zur Y-Achse durch p_2 . Sei q_3 der Schnittpunkt der Geraden $Y = a/2$ mit der Parallelen zur Y-Achse durch q_2 . Dann wird gezeigt, dass $\delta_G(p_3, q_3) \leq \delta_G(p_2, q_2)$ gilt.
4. Zum Schluss wird gezeigt, dass $\delta_G(s_1, s_2) \leq \delta_G(p_3, q_3)$ gilt.

Zu Schritt 1: Trivialerweise existiert immer ein Winkel α , so dass p_1 und q_1 auf einer Parallelen zu X-Achse liegen. Das Einzige was hier zu tun ist, ist zu überprüfen, dass die Dilation bei Drehungen nicht größer wird:

$$\delta_G(p_1, q_1) = \frac{|p_1 h_1| + |h_1 q_1|}{|p_1 q_1|} = \frac{|p h_1| + |h_1 q|}{|p q|} = \delta_G(p, q)$$

Sei β der Winkel zwischen der X-Achse und Geraden h_1q im Punkt h_1 , und sei γ der Winkel zwischen h_1p und der Waagerechten im Punkt h_1 ; siehe Abbildung 8. Falls p und q unterhalb der X-Achse liegen, gilt sicher

$$|ph_1| + |h_1q| > |ph_2| + |h_2q|.$$

Folglich kann angenommen werden, dass der höhere der beiden Punkte, also p , oberhalb der X-Achse liegt. Da der Abstand $|h_1h_2| = 1$ ist, gilt deshalb für $v \geq 0.5$, dass $\gamma \leq \pi/4$ ist. Außerdem muss auch $\beta > \pi/4$ sein. Angenommen β wäre nicht größer als $\pi/4$. Dann wäre

$$|h_1q| < \sqrt{2 \cdot (a+1-a/2)^2} \leq \sqrt{2} \text{ für } a \leq 1.$$

Der rechte Rand von P_2 liegt in einer Entfernung, größer als $v + c \geq 1.5$, von der Y-Achse entfernt. Damit kann für $\beta \leq \pi/4$, q_2 nicht rechts von P_2 liegen. Falls q_2 außerhalb von P_2 liegt muss β also größer als $\pi/4$ sein. Schließlich gilt auch, dass $\alpha + \beta \leq \pi/2$ ist. Daraus folgt dass auch $\alpha \leq \pi/4$ ist.

Jetzt wird der Faktor ϕ berechnet, um den das Dreieck p_1, q_1, h_1 höchstens verkleinert werden muss, damit q_2 innerhalb von P_2 liegt. Die X-Koordinate von q_1 ist:

$$|h_1q_1| \sin \alpha + \beta$$

Die X-Koordinate von q ist $|h_1q| \cdot \sin \beta$. Das bedeutet, für den Skalierungsfaktor ϕ ,

$$\phi \geq \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \beta}$$

liegt q_2 sicher in P_2 , da der Abstand von q_2 zur Y-Achse dann kleiner als der Abstand von q zur Y-Achse ist.

Als nächstes wird den Punkt p_2 betrachtet. Nach der Rotation liegt p_1 unterhalb von p . Der Punkt p liegt innerhalb von P_1 und damit unterhalb der Geraden $X = a/2$. Das heißt, der Faktor ϕ kann dadurch abgeschätzt werden, um welchen Faktor man das Dreieck $p_2q_2h_1$ verkleinern müsste, dass p und p_2 auf gleicher Höhe liegen:

$$\varphi \leq \frac{|ph_1| \cdot \sin \gamma}{|ph_1| \cdot \sin \alpha + \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha + \gamma}$$

Um die Winkelsummen in den Sinusfunktionen aufzulösen, wird folgende Rechnung verwendet:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \beta &= \operatorname{Im}(e^{i(\alpha + \beta)}) = \operatorname{Im}(e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}) = \operatorname{Im}((\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta)) \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

da $\beta \geq \gamma$, $0 \leq \alpha$, $\gamma \leq \pi/4$ sind, ist $\sin \beta > \sin \gamma$ und $\cos \gamma > \cos \beta$. Damit gilt:

$$\frac{\phi}{\varphi} = \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha + \gamma}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} > 1$$

ϕ ist also kleiner als φ . Folglich liegt p_2 nicht höher als p . Da p_1 und q_1 auf einer X-achsenparallelen Gerade liegen, kann auch q_2 nicht zu hoch liegen.

Zu Schritt 3: Für den dritten Schritt muss gezeigt werden, dass die Punkte p_3 und q_3 , die vertikal über p_2 und q_2 auf der Geraden $Y = a/2$ liegen, eine kleinere Dilation als p_2 und q_2 haben. Dazu wird folgendes Problem betrachtet:

Lemma 4: Gegeben seien zwei Punkte A, B , die jeweils rechts und links mit Abstand x, y vom Ursprung auf der X-Achse liegen; siehe Abbildung 9. Ferner existiere ein dritter Punkt C auf der Y-Achse mit Abstand b zum Ursprung. Der kürzeste Pfad $\xi(A, B)$ ist gegeben durch $|AC| + |CB|$. Dann gilt für die Dilation $\delta(b)$ von A und B in Abhängigkeit von b :

$$\delta(b) = \frac{|AC| + |CB|}{|AB|} = \frac{\sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2}}{x + y} \text{ ist streng monoton steigend für } b > 0.$$

Aus Lemma 4 folgt die Behauptung für Schritt 3.

Zu Schritt 4: Jetzt liegen die Punkte p_3 und q_3 auf dem oberen Rand von P_1 bzw. P_2 . Es bleibt zu zeigen, dass die Punkte s_1, s_2 die weiter außen liegen eine geringere Dilation haben. Für diesen Zweck wird folgendes Lemma verwendet:

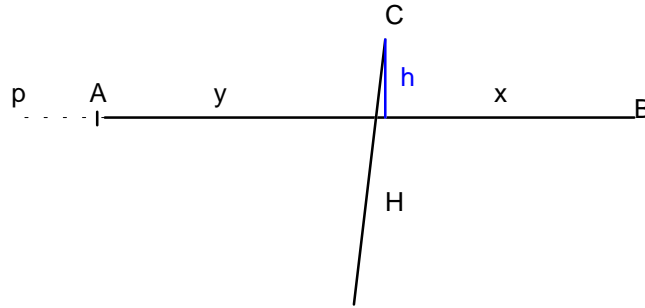


Abbildung 9: Konstruktion für Beweis von Lemma 4 und 5

Lemma 5: Seien A und B zwei Punkte. Sei H ein Hindernis, das A und B trennt. Sei p ein beliebiger Punkt auf der Geraden durch A und B , dessen Abstand zu B größer ist als der Abstand von A und B , und für den gilt, dass das Liniensegment von p nach B das Hindernis H schneidet; siehe Abbildung 9. Dann gilt:

$$\delta(p, B) < \delta(A, B).$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegen A und B auf der X -Achse mit Abstand x bzw. y vom Ursprung; siehe Abbildung 9. Ferner schneidet das Hindernis die X -Achse und der obere Punkt C von H liegt auf der Y -Achse in Höhe h . Außerdem sei der kürzeste Pfad von A nach B gegeben durch die Strecken AC , CB . Damit gilt für die Dilation δ in Abhängigkeit des Abstandes x von Punkt A zur Y -Achse:

$$\delta(x) = \frac{\sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2}}{x + y} \quad \text{mit } x, y, h > 0.$$

Leitet man nun $\delta(x)$ nach x ab erhält man:

$$\delta'(x) = \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{x}{(x + y) \cdot \sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{\sqrt{y^2 + h^2} + \sqrt{x^2 + h^2}}{(x + y)^2}$$

Die Extrema liegen bei:

$$\begin{aligned} \delta'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= xy - \sqrt{x^2 + h^2} \cdot \sqrt{y^2 + h^2} - h^2 \\ \Leftrightarrow x &= -y \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass kein Extremum im Definitionsbereich existiert. Setzt man beliebige, positive Zahlen für x, y und h ein, stellt man fest, dass $\delta'(x) < 0$ ist; zum Beispiel ergibt $x = y = h = 1$:

$$\delta'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} < 0.$$

Da $\delta'(x)$ keine Nullstellen im Definitionsbereich besitzt folgt, dass $\delta(x)$ streng monoton fallend ist. Daraus folgt die Behauptung von Lemma 5. \square

Nach Lemma 5 gilt $\delta(p_3, q_3) \geq \delta(s_1, q_3) \geq \delta(s_1, s_2)$. Damit ist folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 6: *Seien $s_1 \in P_1$ und $s_2 \in P_2$ jeweils in den äußeren, oberen Ecken von P_1 bzw. P_2 . Dann haben s_1, s_2 eine minimale Dilation unter allen Punktepaaren $p \in P_1, q \in P_2$.*

\square

3.3 PUNKTEPAAR MIT NIEDRIGSTER DILATION IM FALL 2 UND 3

In diesem Kapitel folgt der letzte, noch ausstehende Teil des Beweises für die untere Schranke für Graphen mit beschränkter Flächengröße. Angenommen es liegt jeweils ein Punkt in B_1 unterhalb oder auf der X-Achse und ein Punkt in B_2 oberhalb oder auf der X-Achse. Dieser Fall enthält die Fälle 2 und 3 aus Kapitel 3.1. Es ist klar, dass wenn man die Punkte p und q aus einer Teilmenge wählt, die Dilation nicht kleiner werden kann, als das Minimum der Dilation zweier Punkte aus der Obermenge. Falls jeweils der Punkt in B_1 oberhalb und der Punkt in B_2 unterhalb der X-Achse liegt, geht der Beweis genauso. Es werden dann alle Konstruktionen an der Y-Achse gespiegelt.

Seien $p \in B_1$ unterhalb der X-Achse und $q \in B_2$ oberhalb der X-Achse, beliebig. Sei u_1 der Schnittpunkt der X-Achse mit dem linken Rand von B_1 . Außerdem sei r_2 der linke obere Punkt von B_2 . Dann soll gezeigt werden, dass Dilation von u_1 und r_2 minimal unter allen möglichen Punktepaaren p, q ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, führt der kürzeste Pfad von p nach q über h_1 . Ansonsten wird die ganze Konstruktion um den Ursprung gedreht, so erhält man den hier beschriebenen Fall.

Es werden zwei Fälle unterschieden:

Fall A: Falls $\frac{|h_1 r_2|}{|h_1 u_1|} \leq \frac{|h_1 q|}{|h_1 p|} \leq \frac{|h_1 u_1|}{|h_1 r_2|}$ gilt, erfolgt der Beweis in vier Schritten; siehe Abbildung 10.

Erst wird eine kurze Übersicht über die Schritte gegeben, bevor sie im Detail behandelt werden:

1. Sei K_p der Kreis mit Radius $|h_1 p|$ um p . Sei p_1 der Schnittpunkt von K_p mit dem Strahl von h_1 durch u_1 . Sei K_q der Kreis mit Radius $|h_1 q|$ um q , und sei q_1 der Schnittpunkt von K_q mit dem Strahl von h_1 durch r_2 . Es bleibt zu zeigen, dass $\delta_G(p, q) \geq \delta_G(p_1, q_1)$ gilt.
2. Falls $|h_1 q| > |h_1 p|$ sei p_2 der Punkt auf dem Strahl von h_1 durch u_1 mit Entfernung $|h_1 q|$ von h_1 und q_2 der Punkt auf dem Strahl von h_1 nach r_2 mit Entfernung $|h_1 p|$ von h_1 . Es werden sozusagen die Entfernungen vertauscht. Ansonsten gilt $p_2 := p_1$ und $q_2 := q_1$. Trivialerweise ist $\delta_G(p_1, q_1) = \delta_G(p_2, q_2)$.

3. Sei p_3 der Punkt auf dem Strahl von h_1 durch u_1 , so dass p_3 die Entfernung $\frac{|h_1 p_2| \cdot |h_1 r_2|}{|h_1 p_2|}$ von h_1 hat. Dann gilt $\delta_G(p_3, r_2) = \delta_G(p_2, q_2)$ und $|p_3 h_1| \leq |u_1 h_1|$.
4. Zeige, dass $\delta_G(p_3, r_2) \geq \delta_G(u_1, r_2)$ gilt.

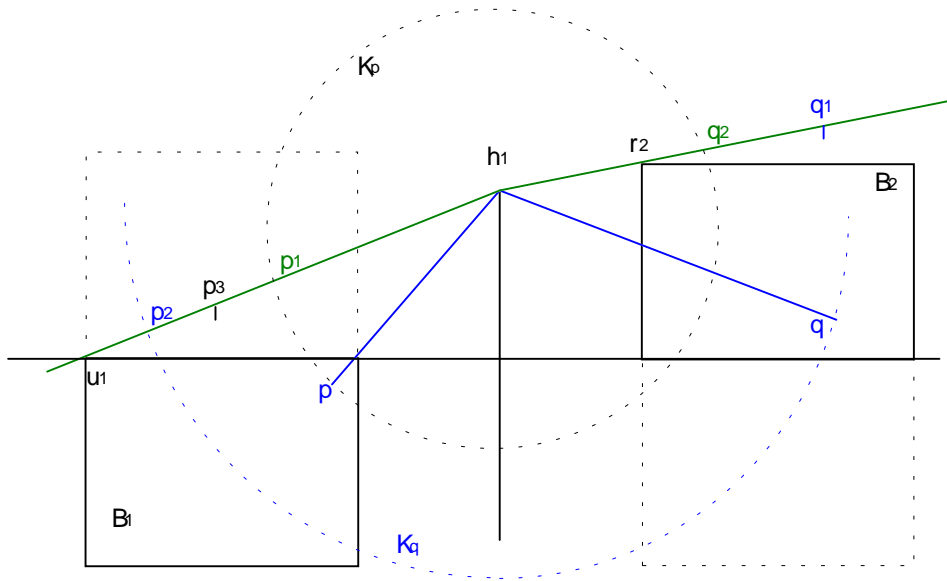


Abbildung 10: Konstruktion im Fall A beim Beweis von Lemma 9.

Im Folgenden wird nun näher auf die einzelnen Schritte eingegangen:

Zu 1): Sei p_1 der Schnittpunkt des Kreises K_p mit dem Strahl von h_1 durch u_1 und sei q_1 der Schnittpunkt des Kreises K_q mit dem Strahl von h_1 durch r_2 . Sei β der Winkel zwischen $h_1 p$ und $p q$ im Punkt p und γ der Winkel zwischen $h_1 q$ und $q p$ im Punkt q ; siehe Abbildung 11. Entsprechend sei β' der Winkel zwischen $h_1 p_1$ und der $p_1 q_1$ im Punkt p_1 und γ' der Winkel zwischen $h_1 q_1$ und $p_1 q_1$ im Punkt q_1 . Es gilt $\gamma \geq \gamma'$ und $\beta \geq \beta'$. Der Weg $|p h_1| + |h_1 q|$ ist genauso lang wie der Weg $|p_1 h_1| + |h_1 q_1|$. Aber für den Abstand gilt, $|p q| \leq |p_1 q_1|$ wie man sich leicht überzeugen kann:

$$|p q| = |h_1 p| \cdot \cos \beta + |h_1 q| \cdot \cos \gamma \leq |h_1 p| \cdot \cos \beta' + |h_1 q| \cdot \cos \gamma' = |p_1 q_1|$$

Daraus folgt, dass $\delta_G(p, q) \geq \delta_G(p_1, q_1)$ ist.

Zu 2): Zum zweiten Schritt gibt es nichts mehr zu zeigen.

Zu 3): Sei $\phi = \frac{|h_1 r_2|}{|h_1 q_2|}$. Nach dem Strahlensatz gilt: $\phi |p_2 q_2| = |p_3 r_2|$. Das heißt das Dreieck $p_3 r_2 h_1$ ist ähnlich zu dem Dreieck $p_2 q_2 h_1$, nur das es um den Faktor ϕ verkleinert ist. Damit ist die erste Behauptung wahr, dass $\delta_G(p_3, r_2) = \delta_G(p_2, q_2)$ gilt.

Aus $\frac{|p_3 h_1|}{|h_1 r_2|} \leq \frac{\max(|h_1 q|, |h_1 p|)}{\min(|h_1 q|, |h_1 p|)} \leq \frac{|u_1 h_1|}{|h_1 r_2|}$ folgt die zweite Behauptung, dass $|p_3 h_1| \leq |u_1 h_1|$ ist.

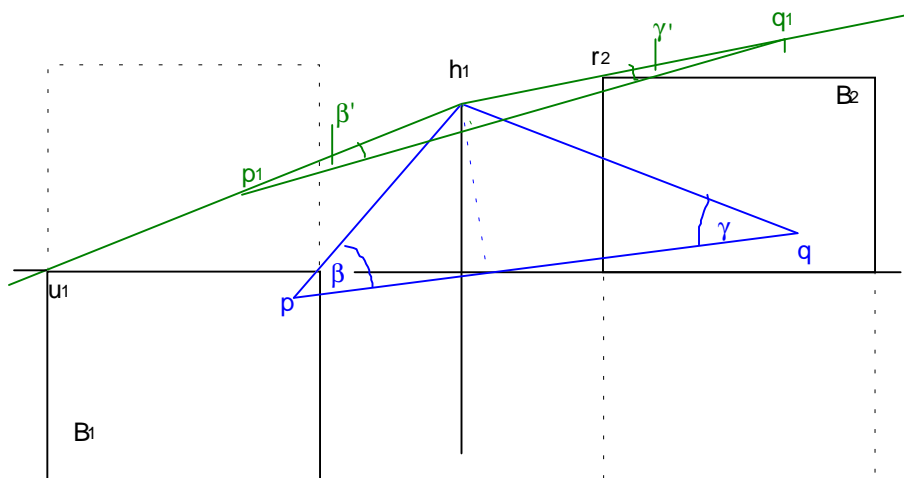


Abbildung 11: Konstruktion zum Fall A Schritt 1.

Zu 4): Jetzt gilt es zu zeigen, dass $\delta_G(p_3, r_2) \geq \delta_G(u_1, r_2)$ gilt. Das wird durch folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 7: Sei ABC ein Dreieck und seien α, β, χ die Winkel in den Ecken des Dreiecks, sowie a, b, c die Seiten, die den Ecken A, B, C gegenüber liegen (siehe Bild 12). Seien χ und c fest. Dann ist die Summe der beiden übrigen Seiten $a + b$ maximal wenn $\alpha = \beta = (\pi - \chi)/2$. Für $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ wird $a + b$ umso kleiner, je größer $|a - b|$ ist

Beweis: Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \chi} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \chi} \quad \text{und} \quad b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \chi}$$

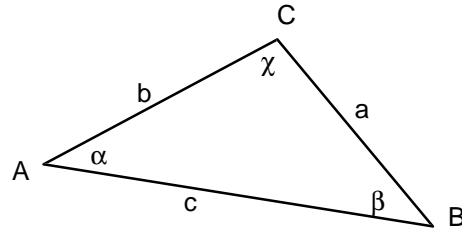


Abbildung 12: Konstruktion zum Beweis von Lemma 7 und 8

daraus folgt:

$$a + b = \frac{c}{\sin \chi} (\sin \alpha + \sin \beta) \quad (*)$$

da c und $\sin \chi$ fest sind, wird $a + b$ maximal, wenn $\sin \alpha + \sin \beta$ maximal wird. Wegen dem Innenwinkelsatz von Dreiecken gilt:

$$\beta = \pi - \alpha - \chi$$

eingesetzt in (*) erhält man die Funktion

$$f(\alpha) = \sin \alpha + \sin(\pi - \alpha - \chi)$$

Leitet man f nach α ab, erhält man:

$$f'(\alpha) = \cos \alpha - \cos(\pi - \alpha - \chi)$$

Für $0 < \alpha < \pi$ ist $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}(\pi - \chi)$. Die zweite Ableitung ist:

$$f''(\alpha) = -\sin \alpha - \sin(\pi - \alpha - \chi).$$

Setzt man $\beta = \pi - \alpha - \chi$ und $\alpha = \beta$ in f'' ein, dann erhält man:

$$f''(\alpha) = -\sin \alpha - \sin \alpha < 0 \text{ für } \alpha > 0.$$

Das bedeutet, dass im Intervall $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ nur ein Maximum bei $\alpha = \beta$ existiert, dass f vor dem Maximum streng monoton steigend ist und nach dem Maximum streng monoton fallend ist. Daraus folgt die Behauptung □

Mit Hilfe von Lemma 7 kann Lemma 8 bewiesen werden:

Lemma 8: Seien A und B zwei Punkte, die durch ein Hindernis getrennt sind. Sei C der obere Eckpunkt des Hindernisses, so dass der kürzeste Weg von A nach B durch den Punkt C führt. Dann gilt für jeden Punkt p auf dem Strahl von C durch A :

- 1 Falls $|AC| \geq |BC|$: Die Dilation $\delta(p, B)$ aller Punkte p auf dem Strahl von C durch A mit $|pC| > |AC|$ ist kleiner als die Dilation $\delta(A, B)$.
- 2 Falls $|AC| \leq |BC|$: Die Dilation $\delta(p, B)$ aller Punkte p auf dem Strahl von C durch A mit $|pC| < |AC|$ ist größer als die Dilation $\delta(A, B)$.

Beweis: Wenn das Dreieck pBC um den Faktor $|AB| / |pB|$ skaliert wird, erhält man das Dreieck $p'B'C$, mit $|p'B'| = |BC|$. Die Dilation ändert sich durch das Skalieren nicht. Das Dreieck $p'B'C$ und das Dreieck ABC besitzen denselben Innenwinkel bei C und dieselbe Länge der Seite c . Aus Lemma 7 folgt die Behauptung. \square

Nach Konstruktion der bisherigen 3 Schritte ist $|u_1h_1| \geq |p_3h_1| \geq |h_1r_2|$. Mit Lemma 8 folgt nun daraus $\delta_G(p_3, r_2) \geq \delta_G(u_1, r_2)$. Somit ist der Fall A abgeschlossen.

Fall B: Es gelte $\frac{|h_1q|}{|h_1p|} > \frac{|u_1h_1|}{|h_1r_2|}$. Dieser Fall kann nicht auftreten.

Sei t_1 der Schnittpunkt der X-Achse mit dem rechten Rand von B_1 . Damit ist t_1 der Punkt aus der unteren Hälfte von B_1 der am nächsten zu h_1 liegt. Für den am weitesten von h_1 entfernten Punkt aus der oberen Hälfte von B_2 kommen zwei Punkte in Frage, die rechte obere Ecke s_2 oder der Schnittpunkt u_2 der X-Achse mit dem rechten Rand von B_2 . Sei $A.x$ die X-Koordinate eines Punktes A . Es gilt:

$$s_{2,x} - h_{1,x} = c - \frac{a+1}{2}$$

Berücksichtigt man die Bedingung $a + 2 - 2c > 0$ aus Kapitel 3.1, erhält man:

$$c - \frac{a+1}{2} < c - \frac{2c-1}{2} = \frac{1}{2} = h_{1,x}$$

Folglich ist u_2 der am weitesten von h_1 entfernte Punkt aus der oberen Hälfte von B_2 . Es gilt:

$$\frac{|h_1 q|}{|h_1 p|} \leq \frac{|h_1 u_2|}{|h_1 t_1|} = \frac{\sqrt{(v+c)^2 + 1/4}}{\sqrt{v^2 + 1/4}} \leq \frac{\sqrt{(v+c)^2 + 1/4}}{\sqrt{v^2 + (c - (a+1)/2)^2}} = \frac{|u_1 h_1|}{|h_1 r_2|}$$

Das ist ein Widerspruch zur Bedingung von Fall B. Fall B kommt also nie vor.

Fall C: Falls $\frac{|h_1 q|}{|h_1 p|} < \frac{|h_1 r_2|}{|u_1 h_1|}$ wird gezeigt, dass ein Punktepaar p', q' existiert, so dass:

- p' unterhalb der Geraden durch h_1 und u_1 liegt. Außerdem liegt p' links von $X = -v$.
- q' unterhalb der Geraden durch h_1 und r_2 liegt. Außerdem liegt q' rechts von $X = v$.
- $\frac{|h_1 r_2|}{|u_1 h_1|} \leq \frac{|h_1 q'|}{|h_1 p'|} \leq 1$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, tritt Fall A in Kraft.

Es wird wieder in mehreren Schritten vorgegangen; siehe Abbildung 13:

- 1) Es gibt einen Punkt q_1 , der auf dem oberen oder rechten Rand von B_2 liegt, so dass $\delta(p, q_1) \leq \delta(p, q)$ gilt. Falls die Forderung $\frac{|h_1 r_2|}{|u_1 h_1|} \leq \frac{|h_1 q_1|}{|h_1 p|} \leq 1$ danach schon erfüllt ist, setze mit Fall A fort. Sei p_1 der Punkt auf dem rechten Rand von B_2 , der von h_1 dieselbe Entfernung wie p hat. Es gilt: $\delta(p_1, q_1) \leq \delta(p, q)$
- 2) Das Dreieck $p_1 q_1 h_1$ wird um einen Winkel α gedreht; siehe Abbildung 13. Die Ecken des gedrehten Dreiecks werden mit p_2 und q_2 bezeichnet. Der Winkel α wird so gewählt, dass p_2 auf dem Strahl von h_1 nach u_1 zu liegen kommt.
- 3) Sei q_3 der Schnittpunkt von der Geraden durch p_2 und q_2 mit der Geraden durch h_1 und r_2 ; siehe Abbildung 13. Falls $|h_1 q_3| > |h_1 p_2|$ sei q_3 der Schnittpunkt des Kreises um h_1 mit Radius $|h_1 p_2|$ und der Geraden durch p_2 und q_2 . Nach Lemma 5 gilt $\delta(p_2, q_2) \leq \delta(p_2, q_3)$.

4) Schrumpfe das Dreieck $p_2q_3h_1$ um den Faktor $\phi = \frac{|h_1u_1|}{|h_1p_2|}$; siehe Abbildung 13. Das entstehende

Dreieck hat eine Ecke auf dem Punkt u_1 eine Ecke auf dem Punkt h_1 . Die dritte Ecke wird q' genannt. Zeige, dass q' rechts der Geraden $X = v$ liegt. Damit sind die Forderungen erfüllt.

Zu 1): Da q innerhalb von B_2 liegt, gibt es einen Schnittpunkt der Geraden durch p und q mit dem rechten oder oberen Rand von B_2 . Dieser Schnittpunkt wird mit q_1 benannt. Nach Lemma 5 ist $\delta_G(p, q_1) \leq \delta_G(p, q)$. Der Punkt p_1 muss existieren, denn falls $|ph_1| < |u_1h_1|$ gelten würde, wäre die Bedingung $\frac{|h_1r_2|}{|u_1h_1|} \leq \frac{|h_1q_1|}{|h_1p|} \leq 1$ erfüllt gewesen. Auch kann $|ph_1|$ nicht größer sein, als der Abstand von h_1 zur rechten, unteren Ecke von B_2 . Analog zu Fall A, Schritt 1 gilt $\delta(p_1, q_1) \leq \delta(p, q_1)$.

Zu 2): Durch die Rotation ändert sich die Dilation nicht. Folglich gilt für die Dilation von p_2 und q_2 : $\delta_G(p_2, q_2) = \delta_G(p_1, q_1) \leq \delta_G(p, q)$. Falls q_1 auf dem oberen Rand von B_2 liegt, ist $|h_1q_1| \geq |h_1r_2|$. Falls q_1 auf dem rechten Rand von B_2 liegt, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{|h_1q_1|}{|h_1p_1|} &\geq \frac{v+c}{\sqrt{(v+c)^2+1}} = \frac{\sqrt{v^2+c^2+2vc}}{\sqrt{(v+c)^2+1}} \geq \frac{\sqrt{v^2+c^2+1}}{\sqrt{(v+c)^2+1}} \geq \frac{\sqrt{v^2+c^2+0.25}}{\sqrt{(v+c)^2+0.25}} \\ &\geq \frac{\sqrt{v^2+(c+\frac{1-a}{2})^2}}{\sqrt{(v+c)^2+0.25}} = \frac{|h_1r_2|}{|h_1u_1|} \end{aligned}$$

Falls q_1 also auf dem rechten Rand liegt, waren die Bedingungen für Fall A schon nach Schritt 1 erfüllt, und es muss nicht mehr rotiert werden.

Zu 3): Hierzu gibt es nichts mehr zu zeigen.

Zu 4): Der Punkt q_3 liegt nicht oberhalb von der Geraden durch h_1 und r_2 . Somit liegt auch q' nicht über dieser Geraden. Allerdings muss noch gezeigt werden, dass q' rechts von $X = v$ liegt:

a) Zuerst wird angenommen, dass q_3 auf der Geraden h_1r_2 liegt. Dazu wird wieder untersucht, wie groß der Faktor ϕ höchstens zu sein braucht. Dem wird der Faktor ϕ gegenübergestellt, der angibt wie viel das Dreieck maximal geschrumpft werden darf, so dass q' immer noch rechts von $X = v$ liegt. Diese Faktoren werden wieder über Winkelbetrachtungen abgeschätzt.

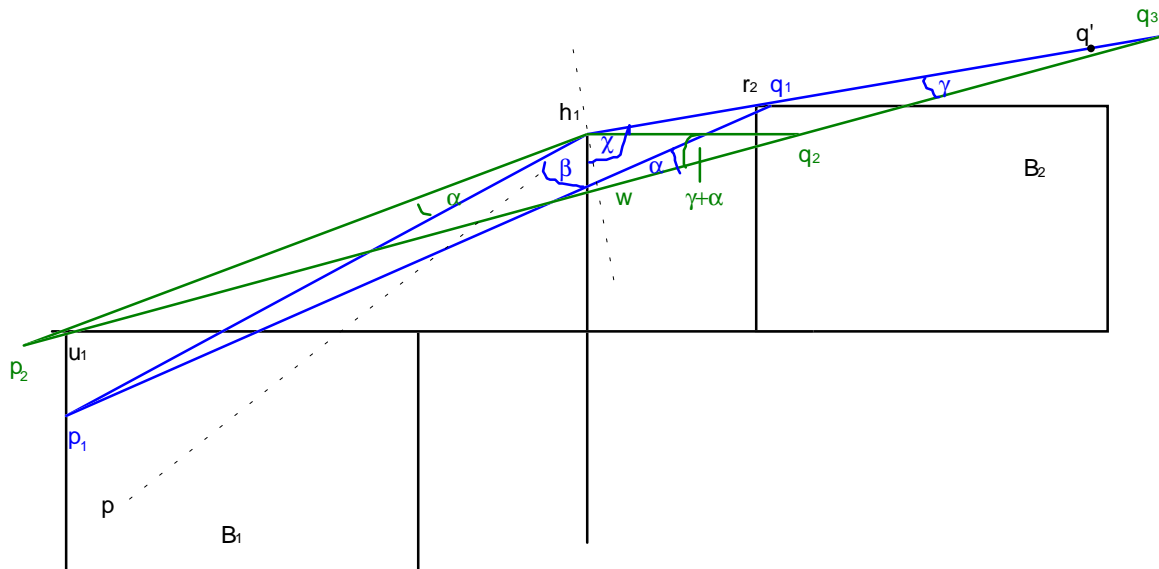


Abbildung 13: Konstruktion zum Beweis von Fall B für Lemma 9. Dabei darf q' nicht rechts der Geraden $X = v$ liegen

Sei β der Winkel zwischen der Y -Achse und der Geraden $h_1 p_1$, und sei χ der Winkel zwischen der Y -Achse und der Geraden $h_1 q_1$. Ferner sei γ der Winkel zwischen der Geraden durch die Punkte h_1, r_2 und q_3 und der Geraden durch p_2, q_2 und q_3 . Da die Gerade durch p_2 und q_2 mit der Gerade durch p_1 und q_1 einen Winkel α einschließt folgt, dass zwischen $h_1 q_2$ und $p_2 q_2$ der Winkel $\gamma + \alpha$ eingeschlossen wird. Außerdem wird der Schnittpunkt von $p_2 q_2$ mit der Senkrechten auf $p_2 q_2$, die durch den Punkt h_1 geht, mit w benannt. Zuerst wird ϕ nach oben abgeschätzt:

$$\phi \leq \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \beta}, \text{ wobei } \pi/4 < \beta \leq \beta + \alpha \leq \pi/2 \text{ gilt.}$$

Jetzt soll der Faktor ϕ nach unten abgeschätzt werden. Die Frage ist, wie weit das Dreieck $p_2 q_3 h_1$ maximal geschrumpft werden darf, ohne das q' links von der Geraden $X = v$ liegt.

Der Punkt q_1 muss auf dem oberen Rand von B_2 liegen. Daraus folgt, dass $|h_1 q_1| \geq |h_1 r_2|$ und $\chi > \pi/2$. Falls also $|q' h_1| \geq |h_1 r_2|$ ist, muss die Entfernung von q' zur Y -Achse größer als v sein, da h_1, r_2 und q' kollinear sind. Es gilt:

$$|h_1q_1| = |h_1q_2| = \frac{|h_1w|}{\sin \gamma + \alpha} \quad \text{und} \quad |h_1q_3| = \frac{|h_1w|}{\sin \gamma}.$$

Nach dem Innenwinkelsatz von Dreiecken ist $\gamma < \pi - \beta - \chi < \pi/4$. Damit kann der Faktor φ abgeschätzt werden, der angibt um wie viel das Dreieck $p_2q_3h_1$ mindestens geschrumpft werden darf, ohne dass q' links der Geraden $X=v$ liegt:

$$\varphi \leq \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha + \gamma}, \text{ wobei } 0 < \gamma \leq \gamma + \alpha \leq \pi/4 \leq \beta \leq \beta + \alpha < \pi/2 \text{ gilt.}$$

Mit $\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha + \sin \beta$ und $\sin \beta > \cos \beta$ sowie $\sin \gamma < \cos \gamma$ gilt:

$$\frac{\phi}{\varphi} > \frac{\sin \beta \cdot \sin \alpha + \gamma}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} > 1$$

Also ist $\varphi < \phi$. Folglich kann das Dreieck weit genug geschrumpft werden, ohne dass q' zu weit links liegt. Für das Seitenverhältnis gilt:

$$\frac{|h_1q'|}{|h_1u_1|} \geq \frac{|h_1r_2|}{|h_1u_1|}$$

Somit sind alle Zielbedingungen erfüllt, die am Anfang von Fall C aufgestellt wurden.

- b) Falls q_3 nicht auf der Geraden durch h_1 und q_1 liegt, gilt $|h_1p_2| = |h_1q_3|$. Außerdem muss gelten $\beta > \chi - \pi/2$, sonst wären r_2 und u_1 gegenseitig sichtbar. Daraus folgt, dass der Abstand von p_2 zu Y-Achse größer ist als der Abstand von q_3 zur Y-Achse. Weil der Abstand von u_1 zur Y-Achse größer als v ist, muss auch der Abstand von q' größer als v sein. Es sind alle Zielbedingungen erfüllt, die am Anfang von Fall C aufgestellt wurden.

Damit wurde folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 9: Sei $u_1 \in B_1$ der Schnittpunkt der X-Achse mit dem rechten Rand von B_1 und $r_2 \in B_2$ die linke obere Ecke B_1 . Dann haben u_1, r_2 eine minimale Dilation unter allen Punktepaaren p, q mit $p \in$ der unteren Hälfte von $B_1, q \in$ der oberen Hälfte von B_2 . □

4. DILATION BEI FAMILIEN VON GERADEN UND MINDESTABSTAND

Bisher wurden bei der Berechnung der Dilation alle Knoten berücksichtigt. Angenommen es geht darum ein Fernverkehrsnetz zu planen. Der Fernverkehr ist nicht dafür gedacht nahe Ziele zu verbinden, sondern für Entfernungen in einer bestimmten Größenordnung. Zum Beispiel geht es bei einem ICE – Netz nicht darum Bahnhöfe zu verbinden, die nur 2 oder 5 km auseinanderliegen. Falls eine gute Verbindung für eine kleine Strecken dabei ist, schadet das nicht, aber eigentlich geht es darum, Großstädte zu verbinden. Kleinere Routen werden dem Regionalverkehr oder Bus und Bahn überlassen. Dieses Verhalten kann dadurch simuliert werden, dass man nur die Knoten des Graphen G berücksichtigt, die einen Mindestabstand voneinander haben.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der aus n Familien $\{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\}$ von parallelen Geraden besteht, wobei zwei benachbarte Geraden einer Familie immer genau den Abstand a haben. Die Geraden der i -ten Familie F_i haben die Orientierung $i \cdot \pi/n$ für $0 \leq i \leq n-1$. Außerdem wird verlangt, dass eine Gerade jeder Familie durch den Ursprung verläuft. Wenn viele Richtungen zur Verfügung stehen, kann man für alle Knoten $p, q \in V$ immer eine Familie finden, deren Geraden fast genau in die Richtung verlaufen, wie die direkte Verbindung von p und q . Für große Entfernungen wird also die Dilation klein, da der längste Teil der Strecke fast parallel zur Geraden pq verläuft.

Bevor man allerdings den ICE in die Hauptrichtung benutzen kann, hat man vor Ort Zu- und Abfahrtswege zum nächsten Knotenpunkt des ICE. Diese Zu- und Abfahrten haben oft eine ganz andere Richtung als die Hauptreisrichtung. Allerdings sind die Zu- und Abfahrten, im Verhältnis zur Hauptrichtung, kurz, so dass sie, im Verhältnis zur Gesamtstrecke, nicht zu sehr ins Gewicht fallen.

In dem Geraden - Arrangement liegen die Knoten p, q im Allgemeinen nicht auf einer Geraden, die nahezu die Richtung pq hat. Also gibt es auch hier Wegstrecken um auf eine passende Gerade zu kommen. Das bedeutet aber auch, dass für nahe Knotenpaare p, q die Dilation groß sein kann. Klein et al. haben gezeigt, dass bei allgemeiner Lage die Dilation mindestens $2/\sqrt{3}$ beträgt [2].

Offensichtlich wird die Dilation immer besser, je mehr Familien es gibt und je kleiner der Abstand a ist. In diesem Kapitel soll ein Zusammenhang zwischen der Dilation, der Anzahl der Familien und dem Abstand der Geraden einer Familie gezeigt werden. Sei m die Zahl der Schnittpunkte eines beliebig platzierten Einheitskreises mit G . Dann kann man $m/2$ als die Geradendichte von G

auffassen. Die Geradendichte kann als Maß für die Menge an Baumaterial betrachtet werden, welches benötigt wird, um einen Graphen G als Graden-Arrangement zu bauen.

Der Hauptteil des Kapitels ist dem Beweis folgendes Theorems gewidmet:

Theorem 4: *Es existiert ein unendlicher Graph G mit folgenden Eigenschaften:*

- G besteht aus n Familien F_0, F_1, \dots, F_{n-1} paralleler Geraden; $n \geq 2$, ganzzahlig.
- Der Abstand zwischen zwei Geraden derselben Familie ist genau a .
- Die Orientierung der Geraden der Familie F_i ist gegeben durch $\alpha_i := i \cdot \pi/n$.
- Für zwei Knoten p, q mit Abstand $d \geq a \cdot \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}} \leq 2.62 \cdot a$ ist die Dilation δ beschränkt durch:

$$\delta(a, d, n) < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \pi/2n}$$

Im Abschnitt 4.1 wird dieses Theorem bewiesen. In Abschnitt 4.2 wird dann noch ein verwandtes Problem betrachtet.

4.1 OBERE SCHRANKE BEI VIELEN RICHTUNGEN UND MINDESTABSTAND

Zuerst werden zwei Definitionen eingeführt, bevor Lemma 11 bewiesen wird. Dieses Lemma bildet den Hauptteil des Beweises von Theorem 4.

Definition 10: Sei F eine Familie von Geraden aus G . Seien $g_1, g_2 \in F$ zwei benachbarte Geraden derselben Familie. Dann ist die Fläche zwischen g_1 und g_2 , vereinigt mit g_1 und g_2 , eine Zeile bezüglich F .

Seien F_1, F_2 Familien von Geraden aus G und $F_1 \neq F_2$. Ferner sei Z_1 eine Zeile bezüglich F_1 und Z_2 eine Zeile bezüglich F_2 . Dann ist $Z_1 \cap Z_2$ eine Zelle von G .

Seien F_1 und F_2 , $F_1 \neq F_2$ zwei Familien von Geraden aus G mit Orientierung o_1 und o_2 . F_1 und F_2 sind Familien mit benachbarten Orientierungen, falls es keine Familie $H \in G$ mit Orientierung o_h gibt, so dass $o_h \in [o_1, o_2]$.

Lemma 11: Sei G ein unendlicher Graph der aus n Familien F_0, F_1, \dots, F_{n-1} paralleler Geraden besteht. Sei a der maximale Abstand zwischen zwei Geraden derselben Familie. Und sei o_i die Orientierung der Geraden der Familie F_i für $0 \leq i \leq n-1$. Sei $\alpha \leq \pi/5$ der maximale Winkel zwischen zwei Geraden aus Familien mit benachbarter Orientierung. Dann gilt für zwei Knoten p, q mit Abstand $d \geq a \cdot \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}} \leq 2.62 \cdot a$:

$$\delta(a, d, \alpha) < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \alpha / 2}$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass ein Pfad W von p nach q mit Länge l existiert, dessen Länge l beschränkt ist durch:

$$l < 2 \cdot a + \frac{d}{\cos \alpha / 2}$$

Aus $\delta(a, d, n) = \frac{l}{d} < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \alpha / 2}$ folgt dann die Behauptung.

Sei g die Gerade, die durch die Punkte p und q geht. Da p und q Knoten sind, gibt es mindestens 2 Geraden $j_1, j_2 \in G$, die sich in p schneiden. Entsprechend gibt es solche Geraden $k_1, k_2 \in G$ auch durch q . Seien $J = \{j_1, j_2, \dots\}$ die Geraden aus G durch den Punkt p , und seien $K = \{k_1, k_2, \dots\}$ die Geraden aus G durch den Punkt q .

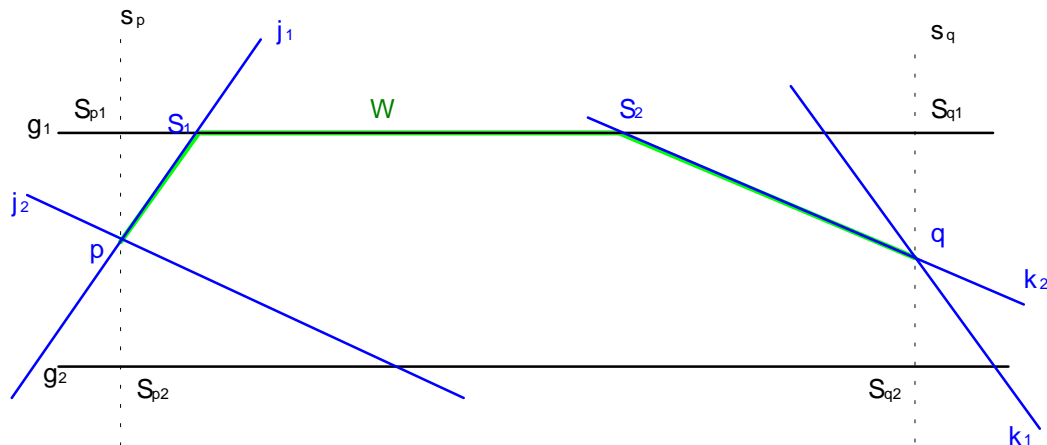


Abbildung 14: Konstruktion zu Lemma 11 Fall A: Die Punkte p und q liegen in einer Zeile.

Es gibt zwei Fälle:

Fall A) Die Punkte p und q liegen in einer Zeile bezüglich einer Familie $F \in G$, die von den Geraden $g_1, g_2 \in F$ begrenzt wird. Sei s_p die Senkrechte auf g_1 durch p und seien S_{p1}, S_{p2} die Schnittpunkte der Senkrechten s_p mit den Geraden g_1 und g_2 . Entsprechend sei s_q die Senkrechte auf g_1 durch q, und es seien S_{q1} und S_{q2} die Schnittpunkte der Senkrechten s_q mit g_1 und g_2 ; siehe Abbildung 14. Für die Strecke von S_{p1} nach S_{q1} gilt: $|S_{p1} S_{q1}| \leq d$.

Die Senkrechten s_p, s_q teilen die Ebene in zwei Halbebenen auf, von denen eine den Punkt q bzw. den Punkt p enthält. Sei $j(q, s_p)$ für $j \in J$ der Schnitt von j mit der Halbebene die q enthält und die von s_p begrenzt wird. Entsprechend sei $k(p, s_q)$ für $k \in K$ der Schnitt von k mit der Halbebene die p enthält und die von s_q begrenzt wird. Jetzt gibt es mehrere Möglichkeiten:

- 1) Es existiert eine Gerade $j \in J$ und eine Gerade $k \in K$, so dass $j(q, s_p)$ und $k(q, s_q)$ sich in der Zeile zwischen g_1 und g_2 im Punkt S schneiden. Der Schnittpunkt S von j und k liegt also in dem Rechteck g_1, g_2, s_q, s_p . Sei W der Pfad von p nach S nach q. Dieser Pfad ist sicher kürzer, als wenn man von p nach S_{p1} nach S_{q1} nach q geht. Also gilt für die Länge l von W:

$$l < |p S_{p1}| + |S_{p1} S_{q1}| + |S_{q1} q| < 2a + d$$

da $|p S_{p1}|$ und $|S_{q1} q|$ mit a abgeschätzt werden können. Damit ist dieser Fall beendet.

- 2) Es existiert eine Gerade $j \in J$ und eine Gerade $k \in K$, so dass die Halbgeraden $j(q, s_p)$ und $k(p, s_q)$ beide dieselbe Gerade g_1 oder g_2 schneiden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit schneiden $j(q, s_p)$ und $k(p, s_q)$ die Gerade g_1 in den Punkten S_1 und S_2 ; siehe Abbildung 14. Daraus folgt, dass ein Pfad W der Länge l existiert, mit

$$l = |p S_1| + |S_1 S_2| + |S_2 q| \leq |p S_{p1}| + |S_{p1} S_{q1}| + |S_{q1} q| < 2a + d.$$

In den folgenden Fällen wird davon ausgegangen, dass keine Geraden $j \in J$ und $k \in K$ existieren, so dass $j(q, s_p)$ und $k(p, s_q)$ beide dieselbe Gerade g_1 oder g_2 schneiden oder dass sich j und k zwischen s_p und s_q schneiden, da diese Fälle schon behandelt wurden. In den folgenden Fällen wird angenommen, dass alle Halbgeraden aus J die Gerade g_1 schneiden und alle Halbgeraden durch q die Gerade g_2 schneiden. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit.

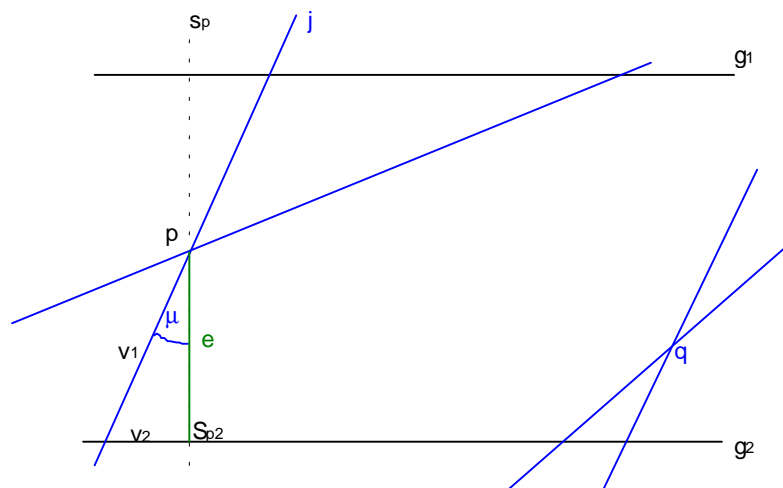


Abbildung 15: Konstruktion zum Beweis von Lemma 11 im Fall A 3)

- 3) Es existiert eine Gerade in $J \cup K$ die mit s_p bzw. s_q einen Winkel $\mu \leq \pi / 5$ einschließt (siehe Abbildung 15). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass es eine Gerade $j \in J$ ist. j geht also durch den Punkt p . Ferner soll der Abstand $e = |p g_2|$ maximal $a/2$ betragen. Sei v_1 die Länge der Strecke von p zum Schnittpunkt von g_2 und j . Sei v_2 die Länge der Strecke von S_{p2} zum Schnittpunkt von g_2 und j . Dann beträgt die Länge v des Weges von p zum Punkt S_{p2} :

beträgt, da $v \leq \pi/4$ ist; siehe Abbildung 16. Sei S_{h1} der Schnittpunkt von h mit g_1 . Ferner sei S_L der Schnittpunkt des Lotes auf g_1 durch S_{h1} mit g_2 . Dann beträgt der Abstand $c = |S_L S_{h2}|$ maximal a . In einem Streifen der Breite a muss mindestens eine Gerade liegen, sonst wäre der Abstand der Geraden $> a$. Folglich durchquert in einem Intervall der Länge $e+c$ eine Gerade h die Zeile, die von g_1 und g_2 gebildet wird. Nach Pythagoras gilt:

$$a^2 + (e + c)^2 = a^2 + a^2 \cdot (1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 2) = a^2 \cdot (4 + 2 \cdot \sqrt{2}) \leq d^2$$

also ist der Abstand von p zu q so groß, dass die Behauptung gilt.

4) Für die Punkte p und q gilt, dass entweder:

- a) durch p, q nur Geraden gehen, die mit s_p einen Winkel $\mu > \pi/5$ einschließen, oder
- b) es gibt eine Gerade $j \in J$ oder $k \in K$ die mit s_p einen Winkel $\mu \leq \pi/5$ einschließt, aber der Abstand e von p zu g_2 ist größer als $a/2$, bzw. der Abstand von q zu g_1 ist größer als $a/2$.

Zuerst wird gezeigt, dass es einen Pfad $W \in G$ von S_{p1} nach S_{q2} gibt, der kürzer als $0.98 a + d$ ist. Danach wird dieser Pfad in G nach p verlängert und gezeigt, dass die Gesamtlänge dieses Pfades für a) oder b) kleiner als $1.49 a + d$ ist. Da man diesen Pfad W in G auch nach q entsprechend verlängern kann, muss es einen Pfad der Länge $2 a + d$ von p nach q in G geben.

Nach Behauptung 12 gibt es eine Gerade h , die g_1 und g_2 zwischen s_p und s_q in den Punkten S_{h1} und S_{h2} schneidet; siehe Abbildung 16. Sei W der Pfad von S_{p1} nach S_{h1} nach S_{h2} nach S_{q2} . Sei e die Länge der Strecke von S_{h1} nach S_{h2} . Dann gilt für die Länge l von W :

$$l = d + e - e \cdot \sin v \quad \text{mit} \quad e = \frac{a}{\cos v} \quad \text{folgt:}$$

$$l = d + a \cdot \frac{1 - \sin v}{\cos v} \quad \text{leitet man } l \text{ nach } v \text{ ab erhält man:} \quad \frac{dl}{dv} = a \cdot \frac{\sin v - 1}{\cos^2 v}$$

Setzt man diese Ableitung gleich 0 erhält man mögliche Extrema bei:

$$0 = \frac{dl}{dv} \Leftrightarrow \sin v = 1 \Leftrightarrow v = \pi/2$$

Daraus folgt, dass v im Intervall $v \in [\pi/4, \pi/100]$ monoton ist. Setzt man beide Intervallgrenzen in l ein sieht man, dass für $v = \pi/100$ die Länge l maximal wird. Für die Länge l des Pfades W gilt:

$$l \leq d + a \cdot \frac{1 - \sin \pi/100}{\cos \pi/100} < d + 0.98a$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass der verlängerte Pfad von p nach S_{q_2} nicht länger als $d+1.49a$ ist.

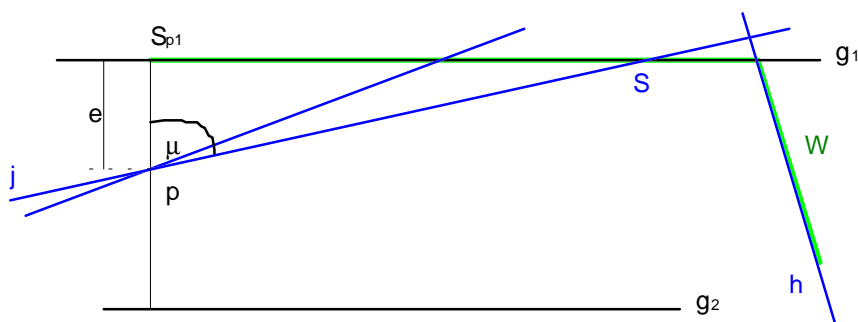


Abbildung 17: Skizze zur Weglänge im Fall 4a)

- a) Sei für alle $j \in J$ der Winkel μ größer als $\pi/5$ (siehe Abbildung 17). Wähle ein beliebiges $j \in J$. Es existiert ein Schnittpunkt S von j mit W . Sei e der Abstand zwischen p und g_1 . Sei W_a der Weg von p nach S und danach weiter auf W bis S_{q_2} . Sei l_a die Länge des Weges W_a . Falls S auf g_1 liegt, ist

$$l_a < l + |pS| + |S_{p1}S|$$

Jetzt wird $|pS| = \frac{e}{\cos \mu}$ und $|S_{p1}S| = |pS| \sin \mu = e \cdot \tan \mu$ eingesetzt.

Reiseweg. Dabei werden Zu- und Abfahrt durch dieselbe Konstruktion abgeschätzt. Zuerst wird nun die Länge des Reiseweges behandelt. Dazu wird ein Punktepaar (R_p, R_q) mit $R_p \in Z_p$ und $R_q \in Z_q$ betrachtet.

Behauptung 13: Für die Länge l_R eines kürzesten Pfades in G zwischen den Punkten R_p, R_q gilt:

$$l_R \leq \frac{d}{\cos \alpha/2}$$

Beweis: Seien h_{p1} und f_{p2} die zwei Geraden auf dem Rand von Zelle G_p , die zwischen p und q liegen; siehe Abbildung 20. Dann liegt q in $E(f_{p2}, q) \cap E(h_{p1}, q)$. Sei T_p der Schnitt von f_{p2} und h_{p1} . Analog seien h_{q2} und f_{q1} die Geraden auf dem Rand von G_q , die zwischen p und q liegen. Dann liegt p in $E(f_{q1}, p) \cap E(h_{q2}, p)$. Sei T_q der Schnitt von f_{q1} und h_{q2} . Sei T_1 der Schnittpunkt von h_{p1} und f_{q1} . Der Pfad W_R starte in R_p , gehe nach T_p und dann weiter nach T_1 , von da nach T_q und von dort nach R_q . Alle benutzten Geraden von W_R schließen mit w einen Winkel $\leq \alpha/2$ ein. Der Pfad selbst enthält keine Winkel die kleiner als $\pi - \alpha$ sind. Sei β der Winkel zwischen g und w . Der Abstand e von s_p und s_q beträgt dann $e = d \cdot \cos \beta \leq d$. Damit kann l_R abgeschätzt werden:

$$l_R \leq \frac{e}{\cos \alpha} \leq \frac{d}{\cos \alpha}$$

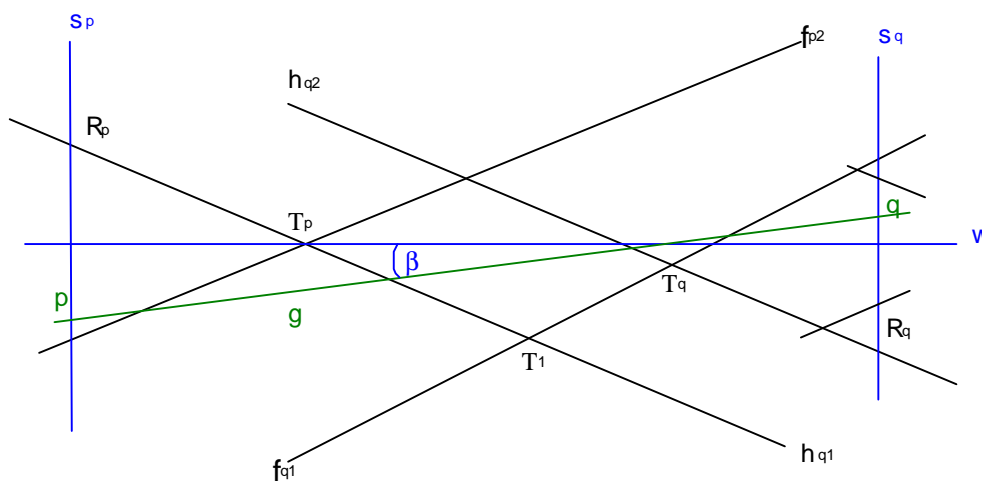


Abbildung 20: Länge eines Pfades um jeweils einen Punkt aus S_p und einen aus S_q miteinander zu verbinden.

Als nächstes wird gezeigt, dass sich die Länge der Zu- und Abfahrt jeweils mit a nach oben

abschätzen lässt. Betrachte hierzu die Zelle Z_p , in der p liegt. Sei s_{pf} die Senkrechte durch p auf der Geraden f_{p1} , und sei s_{ph} die Senkrechte durch p auf der Geraden h_{p1} . Jede Gerade durch p teilt die Ebene in zwei Halbebenen auf, von denen eine Halbebene den Punkt q enthält. Sei für eine beliebige Gerade f und ein $j \in J$, der Schnitt von j mit der Halbebene $E(f, q)$ als $j(f, q)$ definiert. Dabei ist $E(f, q)$ die Halbebene, die den Punkt q enthält und die von f begrenzt wird.

- 1) Falls eine Gerade $j \in J$ existiert, so dass $j \subset E(q, s_{pf}) \cap E(q, s_{ph})$, dann schneidet $j(s_{pf}, q)$ den Rand von Z_p im Punkt S (siehe Abbildung 21). Der Weg von einem Punkt $R_q \in S_q$ auf dem Rand von Z_q nach S nach p ist dann kürzer als $a + \frac{d}{\cos \alpha/2}$.

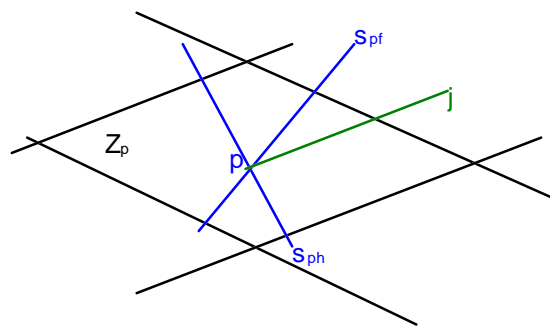


Abbildung 21: Skizze zu Fall B 1) vom Beweis zu Lemma 11

- 2) Alle Geraden aus J liegen in einem Doppeltrichter D ; siehe Abbildung 22. Dabei sei der Doppeltrichter D gegeben durch $D = (E(q, s_{pf}) \setminus E(q, s_{ph})) \cup (E(q, s_{ph}) \setminus E(q, s_{pf}))$. Er wird also zwischen s_{pf} und s_{ph} gebildet. Der Öffnungswinkel μ des Doppeltrichters ist maximal α und s_p ist die Symmetrieachse von D . Entweder ist der Abstand von p zu f_{p1} maximal $a/2$ oder der Abstand von p zu f_{p2} ist maximal $a/2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass der Abstand e von p zu f_{p1} maximal $a/2$ ist. Sei R_h der Schnittpunkt zwischen s_{ph} und h_{p1} , und sei R_f der Schnittpunkt von s_{pf} und f_{p1} .

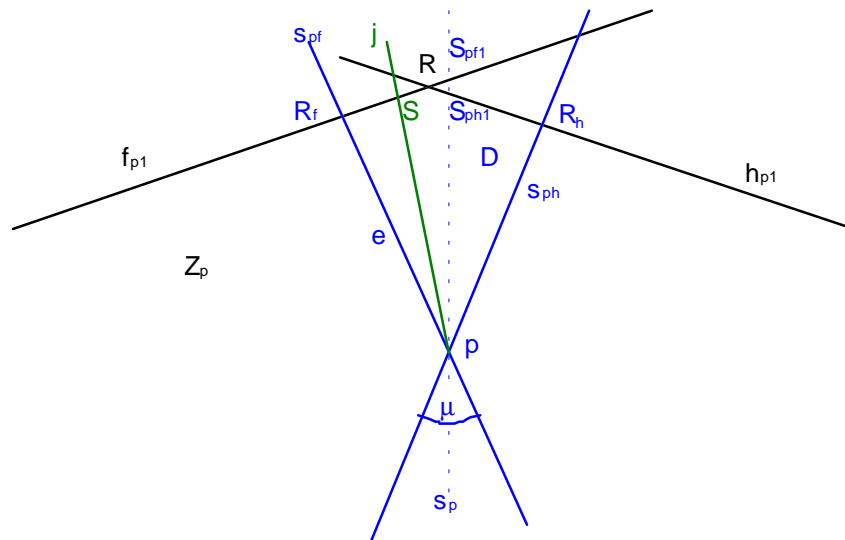


Abbildung 22: Skizze zum Fall B 2) des Beweises von Lemma 11

Sei S der Schnittpunkt von j mit dem Rand von Z_p . Der Punkt S muss zwischen R_f und R_h liegen, sonst würde 1) zugetroffen haben. Es gilt:

$$|pS| \leq \frac{e}{\cos \mu} \text{ und } |R_f R_h| \leq |R_h p| \sin \mu = \frac{e}{\cos \mu} \cdot \sin \mu = e \cdot \tan \mu .$$

Der Pfad von p nach S nach S_{pf1} ist sicher kürzer als der Pfad von p nach S nach R_h . So kann die Länge v des Zuweges folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} v &= |pS| + |S_{pf1}S| < |pS| + |R_f R_h| < \frac{e}{\cos \mu} + e \cdot \tan \mu \leq \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \mu} + \tan \mu \right) \\ &\leq \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha \right) < a \quad \text{da } \mu \leq \alpha \leq \pi/5. \end{aligned}$$

Da auch der Zuweg zu q analog durch a beschränkt ist, existiert ein Pfad von p nach q der Länge

$$l < 2 \cdot a + \frac{d}{\cos \alpha/2} .$$

Damit ist Lemma 11 bewiesen. □

Mithilfe von Lemma 11 kann jetzt Theorem 4 bewiesen werden.

Theorem 4: *Es existiert ein unendlicher Graph G mit folgenden Eigenschaften:*

- G besteht aus n Familien F_0, F_1, \dots, F_{n-1} paralleler Geraden; $n \geq 2$, ganzzahlig.
- Der Abstand zwischen zwei Geraden derselben Familie ist genau a .
- Die Orientierung der Geraden der Familie F_i ist gegeben durch $\alpha_i := i \cdot \pi/n$.
- Für zwei Knoten p, q mit Abstand $d \geq a \cdot \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}} \leq 2.62 \cdot a$ ist die Dilation δ beschränkt durch:

$$\delta(a, d, n) < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \pi/2n}$$

Beweis: Falls aus jeder Familie eine Gerade durch den Ursprung geht, erfüllt der Graph die Behauptung. Um dieses Theorem zu beweisen, werden verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von n untersucht:

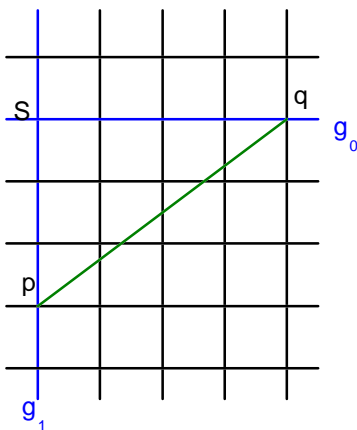


Abbildung 23: Skizze zum Beweis von Theorem 4 für $n = 2$

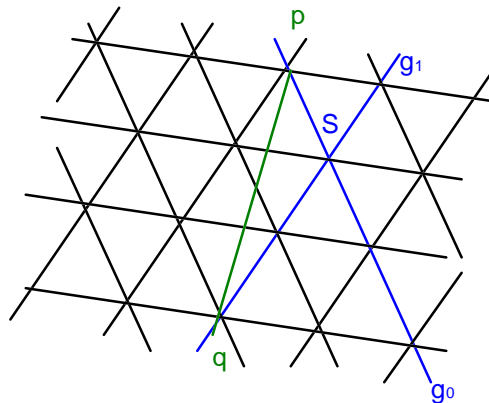


Abbildung 24: Skizze zum Beweis von Theorem 4 für $n = 3$

- a) **$n = 2$:** Der entstehende Graph ist ein rechtwinkliges Gitter; siehe Abbildung 23. Seien p und q zwei beliebige Knoten des Gitters. Beide Punkte p, q sind Schnittpunkte von jeweils einer Geraden aus F_0 und F_1 . Sei $g_0 \in F_0$ eine Gerade durch p und $g_1 \in F_1$ eine Gerade durch q . Sei S

der Schnittpunkt von g_0 und g_1 . Dann ist der Pfad von p nach S nach q ein kürzester Pfad von p nach q . Nach Lemma 7 wird die Dilation maximal, falls $|pS| = |qS|$. In diesem Fall beträgt die Dilation:

$$\delta(a, d, n) = \sqrt{2} = \frac{1}{\cos \pi/4} < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \pi/2n}$$

- b) $n = 3$: Der entstehende Graph ist ein Gitter aus gleichseitigen Dreiecken; siehe Abbildung 24. In jedem Knoten schneiden sich jeweils eine Gerade aus allen drei Familien. Sei g_0 eine Gerade durch den Punkt p und sei g_1 eine Gerade durch den Punkt q , die g_0 im Punkt S schneidet. Habe pSq den Winkel $\frac{2}{3}\pi$. Der Pfad von p nach S nach q ist ein kürzester Pfad von p nach q . Nach Lemma 7 wird die Dilation maximal, falls $|pS| = |qS|$. In diesem Fall beträgt die Dilation:

$$\delta(a, d, n) = \frac{1}{\cos \pi/6} < \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \pi/2n}$$

- c) $n = 4$: Es entsteht ein Graph aus zwei rechtwinkligen Gittern, die um $\pi/4$ zueinander verdreht sind; siehe Abbildung 25. Seien j_1 und j_2 zwei der Geraden die sich in p schneiden.

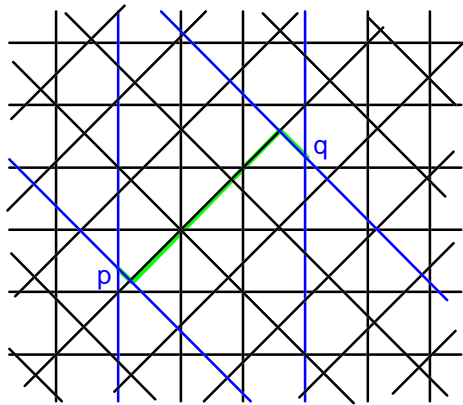


Abbildung 25: Skizze zum Beweis von Theorem 4 zu Fall $n = 4$.

- (i) Falls p und q in einer Zeile bezüglich Familie F liegen, dann ist entweder:
- j_1 oder j_2 senkrecht zu Geraden aus F , oder
 - j_1 und j_2 schneiden beide Seiten der Zeile zwischen p und q .

Dasselbe gilt analog für q . Das bedeutet, es existieren Geraden durch p und q , die dieselbe Gerade aus F zwischen p und q schneiden. Damit gibt es einen Pfad von p nach q dessen Länge durch $2a+d$ beschränkt ist.

- (ii) Falls p und q nicht in einer Zeile liegen: Sei g die Gerade durch p und q . Es existieren zwei Familien F, H so das die Gerade g mit $f \in F$ und $h \in H$ ein Dreieck bildet, so dass er Innenwinkel zwischen f und h den Wert $3\pi/4$ hat. Falls p ein Schnittpunkt einer Geraden aus F oder H ist, entfällt der Zuweg. Falls p ein Schnittpunkt zweier Geraden der beiden anderen Familien ist:

Seien j_f und j_h die beiden Geraden die sich in p schneiden. Die Gerade j_f steht senkrecht auf f und j_h senkrecht auf h . Sei w die Winkelhalbierende des kleineren Winkels von f und h . Sei s_p die Senkrechte auf w durch p . Damit gibt es einen Schnittpunkt S_p von $j_f(s_p, q)$ mit dem Rand der Zelle von p (Vergleiche Fall B 1 aus dem Beweis zu Lemma 11). Analog gibt es solch einen Schnittpunkt S_q für q . Der Pfad von p nach S_p nach S_q nach q hat damit die Länge l :

$$l = |pS_p| + |S_pS_q| + |S_qq| < a + \frac{d}{\cos \pi/8} + a$$

- d) $n > 4$: Nach Lemma 11 gilt die Behauptung.

Damit ist Theorem 4 bewiesen. □

Für die in Theorem 4 konstruierten Graphen gibt es eine einfache untere Schranke für den Wert der Dilation. Wähle p und q so, dass die Gerade g durch p und q die Winkelhalbierende von zwei Familien F, H mit benachbarter Orientierung ist. Ferner sollen p und q jeweils Schnittpunkte von zwei Geraden $f_p, f_q \in F$ und $h_p, h_q \in H$ sein, und sei S der Schnittpunkt von f_p mit h_q . Außerdem sei

$$|pS| = |qS| = 3a. \text{ Dann ist die Dilation } \delta = \frac{1}{\cos \pi/2n}.$$

Das heißt, verbesserbar ist nur der Term $2a/d$, welcher der Länge der Zufahrt entspricht. Für die Länge der Zufahrt gibt es noch keine untere Schranke, und die Dilation ist auch echt kleiner als die hier gezeigte obere Schranke. Der Term $\cos^{-1}(\pi/2n)$ entspricht dem Umweg des eigentlichen Reiseweges und ist scharf. Die untere Schranke gilt auch, wenn man größere Mindestdistanzen betrachtet, da auch dann, für $|pS| = |qS| = ka$ für eine natürliche Zahl k , gilt:

$$\delta = \frac{1}{\cos \pi/2n}.$$

Auch eine Vergrößerung des Mindestabstandes kann keine niedrigere obere Schranke des Reiseweges mehr bringen.

4.2 FOLGERUNGEN

Bisher wurde ein Graph betrachtet, bei dem die Geraden einer Familie alle den selben Abstand haben. Jetzt werden Graphen behandelt, die auch aus Familien von Geraden mit paarweise unterschiedlichen Orientierungen bestehen. Aber anstatt zu fordern, dass benachbarte Geraden einen bestimmten Abstand haben, sei eine Punktmenge S vorgegeben und es soll durch jeden Punkt aus S , eine Gerade aus jeder Familie gehen. Für bestimmte Punktfolgen, kann man als Folgerung aus Lemma 11, Aussagen über die obere Schranke der Dilation von Punktepaaren mit einem Mindestabstand treffen.

Korollar 14: Sei S eine unendliche Menge an Punkten, und sei $O = \{o_0, o_1, \dots, o_{n-1}\}$ mit $0 \leq o_i \leq \pi$ und $n \geq 5$, die Menge an Orientierungen, sortiert. Gelte für ein α , $0 < \alpha \leq \pi/5$, dass $\max_{0 \leq i \leq n-1} |o_i - o_{i+1 \bmod n}| \leq \alpha$. Ferner sei $P_i(S)$ die Orthogonalprojektion der Punkte aus S auf die Senkrechte zu einer Geraden mit Orientierung o_i ; siehe Abbildung 26. Wenn es durch jeden Punkt aus S eine Gerade mit jeder Orientierung aus O gibt und für die Projektionen $P_i(S)$ der Abstand eines Punktes $s \in P_i(S)$ zu seinen beiden Nachbarn in der Projektion maximal a beträgt, für eine Konstante a für $0 \leq i \leq n-1$, dann gilt für zwei Knoten p, q mit Abstand d , $d \geq a \cdot \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{2}} \leq 2.62 \cdot a$:

$$\delta(a, d, \alpha) \leq \frac{2 \cdot a}{d} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Insbesondere muss jeder Punkt in den Projektionen zwei direkte Nachbarn besitzen.

Insbesondere gilt dies falls:

- (i) es eine Gerade g gibt, so dass in jedem abgeschlossenem Intervall der Länge a auf g mindestens ein Punkt aus S liegt und die Orientierung o von g nicht in O enthalten ist.
- (ii) es zwei nichtparallele Geraden g, h gibt, so dass in jedem abgeschlossenem Intervall von g und h der Länge a mindestens einen Punkt aus S enthalten ist.

Beweis: Die Geraden einer Familie haben maximal den Abstand a . Da jeder Punkt zwei Nachbarn haben muss, handelt es sich um n Familien von Geraden. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 11.

- (i) Sei e der Abstand zweier Punkte p, q auf g . Sei f eine Gerade die nicht zu g parallel ist. Sei β der Winkel der zwischen f und g eingeschlossen wird und $0 \leq \beta < \pi/2$. Sei $P(p)$ die Orthogonalprojektion von p auf f . Dann gilt für den Abstand $|P(p)P(q)| = e \cdot \cos \beta \leq e$. Da g nicht Parallel zu einer Geraden aus G sein darf, muss S nie auf eine Senkrechte zu einer Geraden aus g projiziert werden. Deshalb gilt: $\beta < \pi/2$. Damit sind die Bedingungen, dass für die Projektionen $P_i(S)$ der Abstand eines Punktes $s \in P_i(S)$ zu seinen beiden Nachbarn in der Projektion maximal a beträgt, erfüllt.

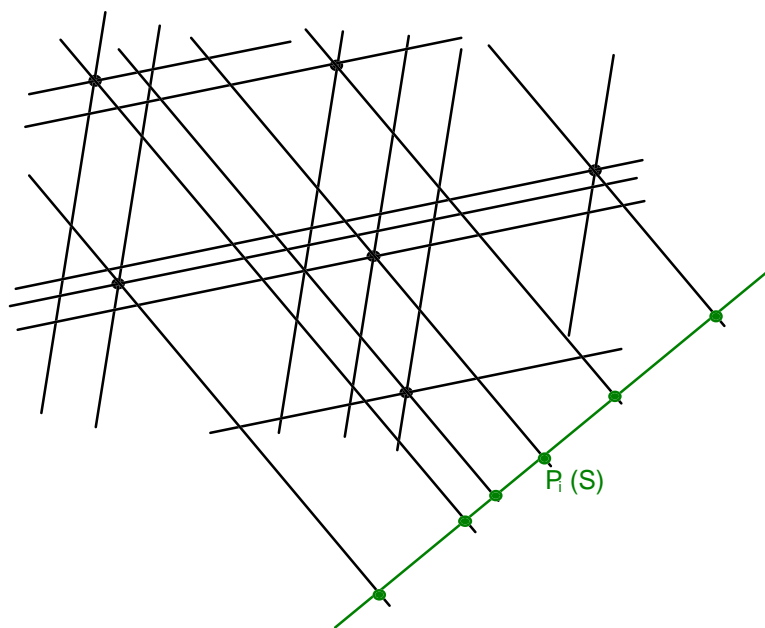


Abbildung 26: Graph aus Familien von Geraden, wenn durch jeden Punkt aus S eine Gerade jeder Familie geht

- (ii) Es gibt höchstens eine Familie F , so dass F und g parallel sind. Für alle anderen Familien ist die Bedingung, dass für die Projektionen $P_i(S)$ der Abstand eines Punktes $s \in P_i(S)$ zu seinen beiden Nachbarn in der Projektion maximal a beträgt, nach (i) erfüllt. Aber F ist nicht parallel zu h . Damit gilt die Behauptung.

Insbesondere genügt es nach Korollar 14, wenn beide Koordinatenachsen im Abstand von a mit Punkten aus S besetzt sind. Falls keine Familie aus G senkrecht auf einer Koordinatenachse steht, reicht es, wenn diese Koordinatenachse im Abstand a mit Punkten aus S besetzt ist. \square

5. AUSBLICK

In dieser Arbeit wurden verschiedene Schranken für den Wert der Dilation vorgestellt:

- Eine obere Schranke für die Einbettung eines Fünfecks von 1.02040
- Eine untere Schranke für Graphen mit beschränkter Flächengröße von 1.001913
- Eine untere Schranke für die Einbettung einer geschlossenen Kurve von 1.001916
- Eine obere Schranke für Familien von Geraden mit Mindestabstand.

Bisher klafft in allen diesen Fällen noch eine Lücke zwischen bester oberer Schranke und bester unterer Schranke. Dies ist ein Bereich wo noch weitere Arbeit getan werden muss. So sind offene Fragestellungen für mögliche, zukünftige Arbeiten:

- Gibt es eine untere Schranke > 1 für die Einbettung eines regelmäßigen Fünfecks? Bzw. gibt es einen Graphen mit einer Dilation beliebig nahe an 1 gibt, der diese Punktmenge einbettet? Meine Vermutung ist, dass es eine untere Schranke > 1 gibt.
- Gibt es eine höhere untere Schranke für Graphen mit beschränkter Flächengröße? Gibt es andere Kriterien, die eine Dilation > 1 garantieren? Oder gibt es einen periodischen Graphen, mit dem sich beliebige Punktmengen einbetten lassen, dessen Dilation kleiner ist als der bisher gefundene Wert?
- Gibt es eine bessere obere oder untere Schranke für die Dilation von Familien von Geraden bei Mindestabstand? Wie verhalten sich andere Graphen, wenn nur die Dilation zwischen Knoten mit Mindestabstand betrachtet werden?

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J.M. Keil und C.A. Gutwin. „*The Delaunay Triangulation Closely Approximates the Complete Euclidean Graph*“. *Discrete Comput. Geom.* 7, 1992, Seiten 13-28.
- [2] A. Ebbers-Baumann, A. Grüne, M. Karpinski, R. Klein, C. Knauer, A. Lingas. „*Embedding Point Sets into Plane Graphs of Small Dilation*“. ISAAK 05
- [3] D. Eppstein, K. Wortmann. „*Minimum Dilation Stars*“. 21st ACM Symp. Comp. Geom., Pisa, 2005, Seiten 321-326.
- [4] A. Ebbers-Baumann, A. Grüne, R. Klein. „*On the geometric Dilation of Finite Point Sets*“. *Algorithmica*, 2004
- [5] A. Ebbers-Baumann, A. Grüne, R. Klein. „*Geometric Dilation of Closed Planar Curves: New Lower Bounds*“. Erscheint in *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2005
- [6] A. Dumitrescu, A. Ebbers-Baumann, A. Grüne, R. Klein, R. Rothe. „*On the Geometric Dilation of Closed Curves, Graphs and Point Sets*“. Erscheint in *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2005.
- [7] D. Eppstein. “Spanning Trees and Spanners.” Tech. Report 96-16, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/> überprüft am 25. 8. 05, erschienen in *Handbook of Computational Geometry*, J.-R. Sack and J. Urrutia, eds., Elsevier, 1999, Seiten 425-461.

ANHANG

LISTING 1: PROGRAMM ZUR PARAMETEROPTIMIERUNG DES GRAPHEN ZUR EINBETTUNG EINES REGELMÄßIGEN FÜNFECKS

```
// Dilation5Eck.cpp : Dient der Parameteroptimierung für einen Graphen zur Einbettung
// der Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "Point.h"

#define MIN(x,y) (x < y ? x : y)

#define PI 3.141592654
#define SCHRITT 0.001

/** Diese Klasse definiert einen Punkt
class Point {
public:
    double x,y;                // Punktkoordinaten
    double getDist(Point b); // Berechnet die Distanz zweier Punkte
};

/** Berechnet die Distanz zweier Punkte
double Point::getDist(Point b) {
    return sqrt((x-b.x)*(x-b.x) + (y-b.y)*(y-b.y));
}

Point A,B,C,D,E;    // Die Eckpunkte des Fünfecks
Point F,G,H,J;      // Die Eckpunkte des inneren Vierecks
Point K;            // Der Innere Punkt des Vierecks

double diam;        // Diameter des Fünfecks

// Länge der Kanten vom 5-Eck zum 4-Eck
double AF, BF, BG;
double CG, CH, DH;
double DJ, EJ, EF;

double FG, GH, HJ, FJ; // Länge der Kanten des 4-Ecks
double GJ, FH;         // Länge der Diagonalen im 4-Eck
double FK, GK, HK, JK; // Länge der Kanten des Vierecks zum Mittelpunkt

// Entfernungen von Ecken des 5-Ecks zu Ecken des 4-Ecks
double AJ, AH, AG;
```



```

double BH, BJ, CJ;
double CF, DF, DG;
double EH, EG;

// Entfernungen der Ecken des 5-Ecks vom Mittelpunkt
double AK, BK, CK;
double DK, EK;

// Länge des Weges der gegenüberliegenden Punkte des Vierecks
double wGJ, wFH;

// Beste bisher gefundene Dilation
double dil=2;

/** Berechnet die Dilation des Graphen
 */
double calculateDilation() {
    double d; // kleinste Dilation der aktuellen Verbindung
    double d2; // Dilation der eines 2. Weges der Verbindung
    double dl; // Größte Dilation der bisher untersuchten Punktpaare

    // Dilation der Punkte des Fünfeck untereinander
    // A zu C
    dl=(AF + wFH + CH) / diam;
    d =(AF + FG + CG) / diam;
    d2=(AF + FJ + wGJ + CG) / diam;
    if (d>d2) d = d2;
    if (d<dl) dl = d;

    // A zu D
    d= (AF + wFH + DH) / diam;
    d2=(AF+FJ+DJ) /diam;
    if (d>d2) d = d2;
    d2=(AF + FG + wGJ +DJ)/ diam;
    if (d>d2) d = d2;
    if (d>dl) dl = d;

    // B zu D
    d= (BG + GH + DH) / diam;
    d2=(BG + wGJ + DJ) / diam;
    if (d>d2) d = d2;
    d2=(BF + wFH + DH) / diam;
    if (d>d2) d = d2;
    d2=(BF + FJ + DJ) / diam;
    if (d>d2) d = d2;
    if (d>dl) dl = d;
}

```

```

// B zu E
d= (BG + wGJ + EJ) / diam;
d2= (BF + EF) / diam;
if (d>d2) d = d2;
if (d>dl) dl = d;

// C zu E
d= (CH + HJ + EJ) / diam;
d2= (CG + wGJ + EJ)/ diam;
if (d>d2) d = d2;
d2= (CG + FG + EF)/ diam;
if (d>d2) d = d2;
d2= (CH + wFH + EF)/ diam;
if (d>d2) d = d2;
if (d>dl) dl = d;

// Dilation der Punkte des Vierecks untereinander
d = wFH / FH;
if (d>dl) dl = d;
d = wGJ / GJ;
if (d>dl) dl = d;

// Dilation von Punkten im Fünfeck
// zu Punkten im Viereck

// A zu J
d= (AF + FJ)/AJ;
if (d>dl) dl = d;

// A zu H
d= (AF +wFH)/AH;
if (d>dl) dl = d;

// A zu G
d= (AF + FG)/AG;
if (d>dl) dl = d;

// B zu J
d= (BG +wGJ)/BJ;
d2=(BF + FJ)/BJ;
if (d>d2) d = d2;
if (d>dl) dl = d;

// B zu H
d= (BG + GH)/BH;
if (d>dl) dl = d;

```

```
// C zu F
d= (CG + FG)/CF;
d2=(CH +wFH)/CF;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// C zu J
d= (CH + HJ)/CJ;
d2=(CG +wGJ)/CJ;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// D zu G
d= (DH + GH)/DG;
d2=(DJ +wGJ)/DG;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// D zu F
d= (DJ + FJ)/DF;
d2=(DH +wFH)/DF;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// E zu H
d= (EJ + HJ)/EH;
d2=(EF +wFH)/EH;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// E zu G
d= (EF + FG)/EG;
d2=(EJ +wGJ)/EG;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// Dilation der Punkte des Fünfecks zum Mittelpunkt
```

```
// A zu K
d =(AF + FK)/AK;
if (d>dl) dl = d;
```

```
// B zu K
d= (BG + GK)/BK;
d2=(BF + FK)/BK;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;
```

```

// C zu K
d= (CH + HK)/CK;
d2=(CG + GK)/CK;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;

// D zu K
d= (DH + HK)/DK;
d2=(DJ + JK)/DK;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;

// E zu K
d= (EH + HK)/EK;
d2=(EJ + JK)/EK;
if (d2<d) d=d2;
if (d>dl) dl = d;

// Dilation des Graphen zurückgeben
return dl;
}

/** Initialisiert die Ecken des 5-Ecks
 */
void init5Points() {
    // Berechnung der Koordinaten
    A.x = cos(2*PI/5*0);
    A.y = sin(2*PI/5*0);
    B.x = cos(2*PI/5*1);
    B.y = sin(2*PI/5*1);
    C.x = cos(2*PI/5*2);
    C.y = sin(2*PI/5*2);
    D.x = cos(2*PI/5*3);
    D.y = sin(2*PI/5*3);
    E.x = cos(2*PI/5*4);
    E.y = sin(2*PI/5*4);
    // Berechnung des Diameters
    diam = A.getDist(C);
}

/** In dem Fünfeck liegt ein Drachen, der nicht durch seine Diagonalen
    trianguliert wird, sondern der Mittelpunkt wird leicht zu Punkt H
    verschoben
 */
void DrachenInK5transMittel() {
    double currdil; // Dilation der momentanen Konfiguration

```

```

// Parameter der besten bisher gefundenen Kombination
double bestH;
double bestD;
double bestB;
double bestC;
double bestI;

// konstante Koordinaten
H.y = 0;
K.y = 0;
F.y = 0;

// Schleife über den h-Parameter
for (double h=0.14; h<=0.15; h+=SCHRITT){
    // Koordinaten setzen
    H.x = -h;
    // bisher festgelegte Weglängen berechnen
    AH = A.getDist(H);
    BH = B.getDist(H);
    CH = C.getDist(H);
    DH = D.getDist(H);
    EH = E.getDist(H);

    // Schleife über den d-Parameter
    for (double d=0.480; d<=0.55; d+=SCHRITT) {
        // Koordinaten setzen
        F.x = d;
        // bisher festgelegte Weglängen berechnen
        AF = A.getDist(F);
        BF = B.getDist(F);
        CF = C.getDist(F);
        DF = D.getDist(F);
        EF = E.getDist(F);
        FH = F.getDist(H);

        // Schleife über den c-Parameter
        for (double c=0.05; c <= 0.06; c+=SCHRITT) {
            // Koordinaten setzen
            G.x = -c;
            J.x = -c;

            // Schleife über den b-Parameter
            for (double b=0.17; b<=0.19; b+=SCHRITT) {
                // Koordinaten setzen
                G.y = b;
                J.y = -b;

                // bisher festgelegte Weglängen berechnen

```

```

AG = A.getDist(G);
BG = B.getDist(G);
CG = C.getDist(G);
DG = D.getDist(G);
EG = E.getDist(G);
FG = F.getDist(G);

AJ = A.getDist(J);
BJ = B.getDist(J);
CJ = C.getDist(J);
DJ = D.getDist(J);
EJ = E.getDist(J);
FJ = F.getDist(J);
GJ = G.getDist(J);
HJ = H.getDist(J);

GH = G.getDist(H);

// Schleife über den i-Parameter
for (double i=c; i<=h; i+=SCHRITT) {
    // Koordinaten setzen
    K.x = -i;

    // restliche Weglängen berechnen
    AK = A.getDist(K);
    BK = B.getDist(K);
    CK = C.getDist(K);
    DK = D.getDist(K);
    EK = E.getDist(K);
    FK = F.getDist(K);
    HK = H.getDist(K);
    GK = G.getDist(K);
    JK = J.getDist(K);
    wGJ = GK + JK;
    wFH = FK + HK;

    // Dilation dieser Konfiguration ermitteln
    currdil = calculateDilation();

    // Falls die Dilation besser ist als die
    // bisher gefundenen ...
    if (currdil<dil) {
        // Ausgeben
        printf("\n\n dil = %f", currdil);
        // Parameter merken
        dil = currdil;
        bestH = h;
        bestD = d;
    }
}

```


LISTING 2: PROGRAMM ZUR PARAMETEROPTIMIERUNG ZUM BEWEIS EINER OBEREN SCHRANKE BEI GRAPHEN MIT BEGRENZTEM FLÄCHENINHALT

```
// UntereSchrankeDil.cpp : Programm zur Parameteroptimierung zum Beweis einer oberen
// Schranke bei Graphen mit begrenztem Flächeninhalt

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define SCHRITT 0.001          // Schrittgröße der Variablenwerte
#define MIN(x,y) (x<y ? x : y) // Berechnet das Minimum

int main(int argc, char* argv[])
{
    double c;          // aktueller Wert für c
    double a;          // aktueller Wert für a
    double v;          // aktueller Wert für v

    double d1, d2, d;  // Dilation für aktuelle Werte im Fall 2, im Fall 1, das Minimum
                      // von beidem

    double bestD;      // Bisher höchster Wert der Dilation
    double bestA;      // Parameter a für beste Dilation
    double bestV;      // Parameter v für beste Dilation

    // Berechne die Dilation und die Parameter für verschiedene c
    for ( c=1; c <= 1.4; c += 0.1 ) {
        bestD = 0;    // Initialisiere höchste Dilation mit 0

        // Schleife über die Werte für v
        for ( v = 0.5; v < 5 ; v += SCHRITT ) {

            // Schleife über die Werte von a
            // a muss einen Mindestwert besitzen der von v abhängt
            for ( a = 2*c-1-v/(v+c); a <= 1; a += SCHRITT ) {

                // Berechnung der Dilation im Fall 2
                d1 = sqrt( (v+c)*(v+c) + 0.25 ) + sqrt ( v*v + (c-a/2-0.5)*(c-a/2-0.5) );
                d1 /= sqrt ( (2*v+c)*(2*v+c) + (c-a/2)*(c-a/2) );

                // Berechnung der Dilation im Fall 1
                d2 = sqrt( (0.5-a/2)*(0.5-a/2) + (v+c)*(v+c) );
                d2 /= (v+c);

                // Berechnung des Minimums beider Fälle
                d = MIN(d1, d2);
            }
        }
    }
}
```



```

        // Falls die Dilation höher ist als die bisher gefundenen
        if (d > bestD) {
            bestD = d;    // merke Dilation und Parameterwerte
            bestA = a;
            bestV = v;
        }
    }
}
// Gib höchste Dilation und zugehörige Parameter für gegebenes c aus
printf("c: %f  d: %f  a: %f  v: %f\n", c, bestD, bestA, bestV);
}

getchar(); // Warte auf Tasteneingabe
return(0); // fertig
}

```