

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Institut für Informatik - Abteilung I

DIPLOMARBEIT

**Zur graphtheoretischen Dilation der  
Delaunay-Triangulation und  
verwandter Graphen**

August 2005

Von

Tom Dickmeiß

Gutachter: Prof. Dr. Rolf Klein  
Prof. Dr. Christel Baier

## **Erklärung**

Mit der Abgabe der Diplomarbeit versichere ich, gemäß § 19 Absatz 7 der DPO vom 15. August 1998, dass ich die Arbeit selbständig durchgeführt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Bonn, den 22. August 2005

Tom Dickmeiß

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Definitionen und Begriffe</b>	<b>7</b>
2.1	Graphentheorie . . . . .	7
2.2	Voronoi-Diagramme . . . . .	8
2.3	Delaunay-Triangulationen . . . . .	9
2.4	Dilation . . . . .	10
2.5	Metriken . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Dilation von Delaunay-Triangulationen</b>	<b>13</b>
3.1	Euklidische Metrik . . . . .	13
3.1.1	Die untere Schranke . . . . .	14
3.1.2	Eine erste obere Schranke . . . . .	15
3.1.3	Die kleinste bekannte obere Schranke . . . . .	29
3.2	Manhattan-Metrik . . . . .	47
3.2.1	Eigenschaften von $DT(S)$ in der $L_1$ -Metrik . . . . .	47
3.2.2	Obere Schranke für die Dilation . . . . .	49
3.2.3	Anwendung in der Bewegungsplanung . . . . .	60
3.3	Dreieck-Metrik . . . . .	62
3.3.1	Besonderheiten der Dreieck-Metrik . . . . .	62
3.3.2	Obere Schranke für die Dilation . . . . .	64
3.3.3	Nachtrag . . . . .	77
3.4	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Dilation verwandter Graphklassen</b>	<b>81</b>
4.1	Planare Graphen mit geringer Dilation . . . . .	81
4.2	Teilgraphen von Delaunay-Triangulationen . . . . .	83
4.3	Fixed-Angle $\theta$ -Graph . . . . .	84
4.3.1	Definition . . . . .	85
4.3.2	Obere Schranke für die Dilation . . . . .	86
4.4	$\beta$ -Skeletons . . . . .	92
4.4.1	Definition . . . . .	92
4.4.2	Obere Schranke für die Dilation . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Ausblick und offene Fragen</b>	<b>96</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>
	<b>Index</b>	<b>99</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Dilation kann als eine Art Maßzahl für den Umweg zwischen zwei Punkten in einem Graphen interpretiert werden, die sich aus der Relation des kürzesten aller möglichen Verbindungswege zum geradlinigen euklidischen Abstand ergibt. Sie trägt zur Lösung zahlreicher geometrischer Probleme bei, und ihre Kenntnis kann in vielen praktischen Anwendungen hilfreich sein, wie z.B. in der Bewegungsplanung für Roboter sowie in etlichen Problemstellungen, wenn es um die Modellierung von Transportwegen in einem Netzwerk geht.

Man unterscheidet die *graphtheoretische Dilation*, bei der nur die Knotenpunkte eines Graphen maßgeblich sind, und die *geometrische Dilation*, bei der auch alle Kantenpunkte mit berücksichtigt werden müssen. In der vorliegenden Diplomarbeit wird nur die graphtheoretische Dilation behandelt, weshalb im folgenden lediglich der Begriff Dilation ohne Zusatz verwendet wird.

Für beide Arten der Dilation sind noch viele Fragen ungeklärt, allerdings existieren für spezielle Klassen von Graphen schon brauchbare Ergebnisse. Eine Graphklasse, die viele praktische Anwendungen hat und daher zur Suche nach einer möglichst kleinen oberen Schranke für den Wert der Dilation motiviert, besteht aus den Delaunay-Triangulationen. Diese enthalten - wie alle planaren Graphen - jeweils nur eine lineare Anzahl an Kanten, was sie nicht zuletzt insbesondere für den Entwurf effizienter Algorithmen interessant macht. Außerdem hat die Delaunay-Triangulation unter allen Triangulationen die größte aufsteigend sortierte Folge der Innenwinkel aller Dreiecke [Kle97]. Der kleinste Winkel im Dreiecksnetz wird also maximiert.

Die Dilation von Delaunay-Triangulationen und verwandten Graphklassen ist Gegenstand dieser Diplomarbeit. Den Schwerpunkt bilden dabei die Delaunay-Triangulationen basierend auf verschiedenen Metriken. Allen vorkommenden Graphklassen gemein ist die Eigenschaft, dass zwei Knotenpunkte genau dann miteinander verbunden werden, wenn sie sich in gewisser Weise in der Nähe zueinander befinden. Den Begriff der Nähe definiert jede Graphklasse natürlich mehr oder weniger unterschiedlich.

In Kapitel 2 werden zunächst die wichtigsten Definitionen und Begriffe vorgestellt, die für das weitere Verständnis notwendig sind.

Wie wir in Kapitel 3 genauer sehen werden, sind obere Schranken für die Dilation von Delaunay-Triangulationen abhängig von der Metrik, mit der sie konstruiert werden. In der euklidischen Metrik ist  $2\pi/(3 \cos(\pi/6)) \approx 2.42$  die kleinste bekannte obere Schranke. Der Beweis dieser Schranke stammt von J. Mark Keil und Carl A. Gutwin aus dem Jahr 1992 [KG92].

Inwieweit sich die Ergebnisse aus Kapitel 3 auf verwandte Graphklassen verallgemeinern lassen wird ansatzweise in Kapitel 4 untersucht.

Einen Ausblick der behandelten Thematik gibt Kapitel 5, in dem auch interessante offene Fragen und Probleme angesprochen werden.

# Kapitel 2

## Definitionen und Begriffe

Dieses Kapitel enthält eine kurze Einführung der wichtigsten Grundbegriffe, die für das Verständnis dieser Diplomarbeit elementar sind und die in den folgenden Kapiteln häufig verwendet und dabei als bekannt vorausgesetzt werden.

### 2.1 Graphentheorie

Graphen sind sehr universelle Strukturen, mit denen sich viele Probleme und Methoden in der Informatik beschreiben lassen.

Ein *ungerichteter Graph* ist ein Paar  $G = (V, E)$ , bestehend aus einer endlichen Menge  $V \neq \emptyset$  und einer Menge  $E$  mit  $E \subseteq \{\{p, q\} \mid p, q \in V\}$ . Die Elemente  $v$  der Menge  $V$  werden *Knoten* oder Punkte genannt, und die Elemente  $e = \{p, q\}$ , oder kurz  $e = pq$ , der Menge  $E$  sind die *Kanten* des Graphen. Die Kante  $e$  verbindet die Knoten  $p$  und  $q$  und wird durch eine ungerichtete - nicht notwendigerweise gerade - Verbindungslinie veranschaulicht.

Zwei Knoten, die in einem Graphen durch eine Kante verbunden sind, heißen *adjazent*. Außerdem sagt man, dass  $p$  und  $q$  mit der Kante  $e$  *inzident* sind. Der *Grad* eines Knotens ist die Anzahl der mit diesem Knoten inzidenten Kanten.

Ist die Knotenmenge  $V$  unendlich, dann spricht man von einem *unendlichen Graphen*. Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden ausschließlich endliche Graphen behandelt, bei denen die Kanten immer geradlinig verlaufen.

Bei einem *gerichteten Graphen*  $G = (V, E)$  erhalten die Kanten eine Orientierung. Eine gerichtete Kante  $(p, q)$  wird durch einen gerichteten Pfeil veranschaulicht, der vom Startknoten  $p$  zum Endknoten  $q$  führt. Dabei ist  $E$  eine zweistellige Relation  $E \subseteq V \times V$  über der Knotenmenge  $V$ .

Ein *vollständiger (ungerichteter) Graph* mit  $n$  Knoten hat als Kanten alle zweielementigen Teilmengen der  $n$ -elementigen Knotenmenge  $V$ . Je zwei verschiedene Knoten sind also jeweils durch eine Kante verbunden.

Eine weitere wichtige Graphklasse sind die *planaren Graphen*. Man nennt einen Graphen planar, wenn in der Ebene eine Darstellung der Knoten und Kanten existiert, bei der sich keine zwei Kanten kreuzen. Planare Graphen haben die interessante Eigenschaft, dass sie nur eine lineare Anzahl an Kanten enthalten [Jun94], was sie insbesondere für den Einsatz in effizienten Algorithmen attraktiv macht.

Ein *Weg* von  $p$  nach  $q$  ist eine Folge jeweils benachbarter Knoten. Als *Pfade* werden Wege in einem Graphen bezeichnet, bei denen keine Kante zweimal durchlaufen wird.

Bisher war nur von *ungewichteten Graphen* die Rede, aber natürlich kann man den Kanten eines Graphen mittels einer *Kantengewichtsfunktion* auch Werte zuordnen, die dann z.B. als Länge, Zeitdauer, Kapazität oder Wahrscheinlichkeit der Kanten interpretiert werden können. Dadurch entstehen *gewichtete Graphen*, bei denen die *Länge* eines Weges oder Pfades als die Summe der Kantengewichte definiert ist. Bei kürzesten Wegen oder Pfaden muss dementsprechend die Summe der Kantengewichte minimal sein.

## 2.2 Voronoi-Diagramme

Sei  $S$  eine endliche Punktmenge in der Ebene. Das *Voronoi-Diagramm*  $VD(S)$  der Punktmenge  $S$  zerlegt die Ebene in verschiedene *offene* und *konvexe Voronoi-Regionen*  $VR(p, S)$ , wobei jede Voronoi-Region einem Punkt aus  $S$  zugeordnet ist, so dass für einen Punkt  $p \in S$  alle Punkte in seiner Region näher an  $p$  liegen als an allen anderen Punkten aus  $S$ . Diejenigen Punkte, die nicht eindeutig einer Voronoi-Region zugeordnet werden können, sondern zu zwei oder mehr Punkten aus  $S$  den gleichen Abstand haben, bilden das Voronoi-Diagramm von  $S$ .

Das Voronoi-Diagramm von  $S$  besteht aus Stücken von *Bisektoren*, deren Bildung jeweils von zwei Punkten abhängt. Der Bisektor  $B(p, q)$  zweier Punkte  $p$  und  $q$  besteht dabei aus genau den Punkten, die zu  $p$  und  $q$  denselben Abstand haben.

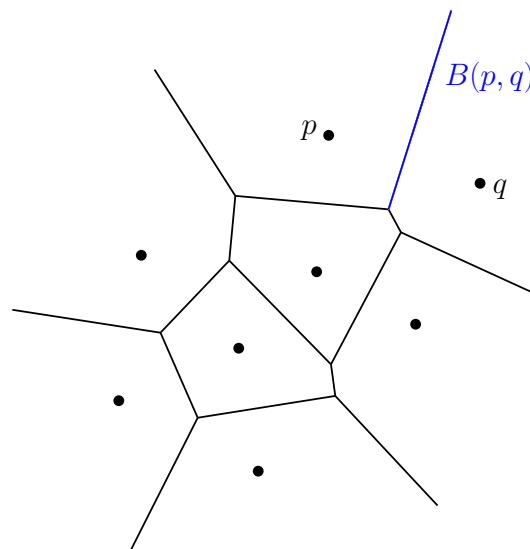


Abbildung 2.1: Das Voronoi-Diagramm einer 8-elementigen Punktmenge  $S$



Betrachten wir zwei angrenzende Voronoi-Regionen, die zu den Punkten  $p$  und  $q$  aus  $S$  gehören, dann sind die Punkte zwischen den beiden Voronoi-Regionen ein Stück des Bisektors von  $p$  und  $q$  und werden *Voronoi-Kante* genannt. Die Endpunkte der Voronoi-Kanten haben mehr als zwei nächste Nachbarn und heißen *Voronoi-Knoten*.

Mit Hilfe des Voronoi-Diagramms lassen sich eine ganze Reihe von Distanzproblemen effizient lösen. So lässt sich z.B. der minimale Spannbaum einer  $n$ -elementigen Punktmenge in Zeit  $O(n \log n)$  aus einem Voronoi-Diagramm ableiten. Das Voronoi-Diagramm selbst lässt sich in optimaler Zeit  $O(n \log n)$  und Speicherplatz  $O(n)$  berechnen [Kle97].

### 2.3 Delaunay-Triangulationen

Eine gewöhnliche *Triangulation einer Punktmenge  $S$*  entsteht, wenn die Punkte aus  $S$  durch eine maximale Menge von Liniensegmenten miteinander verbunden werden, die sich nur in ihren Endpunkten berühren dürfen. In der Terminologie der Graphentheorie ergibt sich also ein zusammenhängender planarer Graph, der die Kanten der konvexen Hülle enthält und aus lauter Dreiecken besteht.

Da die *konvexe Hülle* im weiteren Verlauf noch mehrfach erwähnt wird, sei sie hier kurz definiert. Eine Menge von Punkten in der Ebene heisst *konvex*, wenn sie zu je zwei Punkten  $p$  und  $q$  auch das Liniensegment  $pq$  enthält. Die konvexe Hülle einer Menge  $M$  von Punkten in der Ebene ist dann die kleinste konvexe Menge, die  $M$  enthält.

Die *Delaunay-Triangulation  $DT(S)$*  von  $S$  ist eine spezielle Triangulation mit der Eigenschaft, dass drei Punkte aus  $S$  genau dann ein Dreieck der Delaunay-Triangulation definieren, wenn der eindeutig bestimmte Kreis durch diese drei Punkte keinen Punkt aus  $S$  im Innern enthält. Daraus resultiert eine weitere wichtige Eigenschaft, nämlich dass für jede Kante einer Delaunay-Triangulation ein leerer Kreis durch die Endpunkte der Kante existiert.

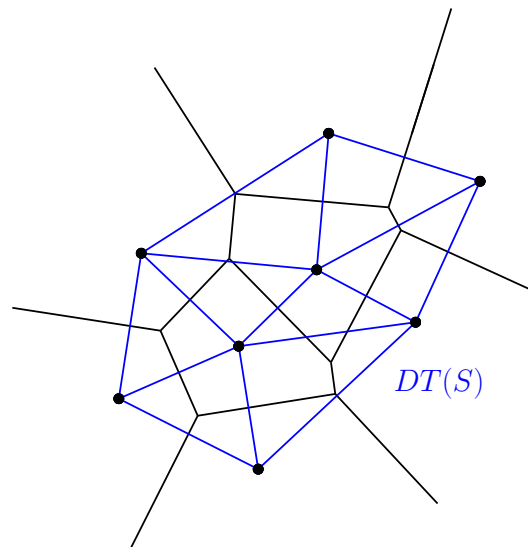


Abbildung 2.2: Die Delaunay-Triangulationen obiger Punktmenge  $S$  mit  $VD(S)$

Delaunay-Triangulationen lassen sich in linearer Zeit aus den entsprechenden Voronoi-Diagrammen ableiten, da sie zueinander *dual* sind (Abbildung 2.2). Dazu sind einfach alle Punkte miteinander zu verbinden, deren Voronoi-Regionen an eine gemeinsame Voronoi-Kante grenzen. Eine direkte Berechnung erfordert ebenfalls nur Zeit  $O(n \log n)$  [Kle97].

Damit eine Delaunay-Triangulation ausschließlich lauter dreieckige Flächen enthält, dürfen nie mehr als drei Punkte aus  $S$  auf dem Rand eines leeren Kreises liegen. Wenn mehr als drei Punkte auf einem gemeinsamen Kreisrand liegen, dann entsteht durch diese Punkte eine konvexe Fläche in  $DT(S)$  mit genau soviel Kanten, wie Punkte auf dem Kreisrand. Aus der Delaunay-Triangulation wird in diesem Fall eine *Delaunay-Zerlegung* von  $S$ .

In der vorliegenden Diplomarbeit wird mit einer Delaunay-Triangulation auch immer tatsächlich eine Triangulation gemeint sein. Die gezeigten Ergebnisse gelten indes sowohl für Delaunay-Triangulationen als auch für Delaunay-Zerlegungen.

## 2.4 Dilation

Sei  $G$  ein planarer und zusammenhängender Graph und seien  $p$  und  $q$  zwei beliebige Knoten- oder Kantenpunkte von  $G$ . Mit  $d_G(p, q)$  bezeichnen wir die Länge des kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  in  $G$  und mit  $d(p, q)$  den euklidischen Abstand. Die *Dilation* der beiden Punkte  $p$  und  $q$  wird durch

$$\delta_G(p, q) := \frac{d_G(p, q)}{d(p, q)}$$

definiert. Der Quotient stellt ein Maß für den Umweg dar, der in Kauf genommen werden muss, wenn anstelle der geradlinigen Bewegung von  $p$  nach  $q$  nur eine Traversierung entlang der Kanten des Graphen  $G$  möglich ist.

Bei der *Dilation* des Graphen  $G$  unterscheidet man zwischen der *graphtheoretischen Dilation* und der *geometrischen Dilation*. Während bei der graphtheoretischen Dilation nur die Knotenpunkte verwendet werden, sind bei der geometrischen Dilation neben allen Knotenpunkten auch alle Kantenpunkte in der Berechnung zu berücksichtigen.

Die vorliegende Diplomarbeit wird sich nur mit der graphtheoretischen Dilation von Graphen einer Punktmenge  $S$  befassen, für die wir  $\delta_G$  schreiben. Sie ist das Maximum der Menge aller Quotienten, die auf obige Weise aus den Knotenpunkten von  $G$  gebildet werden können. Die genaue Definition von  $\delta_G$  lautet also

$$\delta_G := \max_{p, q \in S} \frac{d_G(p, q)}{d(p, q)}.$$

Hat ein planarer Graph z.B. die graphtheoretische Dilation 2, dann sind alle kürzesten Pfade zwischen je zwei Knotenpunkten in diesem Graphen höchstens doppelt so lang wie der geradlinige euklidische Abstand.

Da ausschließlich die graphtheoretische Dilation behandelt wird, kann fortan ohne Missverständnis einfach Dilation geschrieben werden, womit dann also immer die graphtheoretische Dilation  $\delta_G$  gemeint ist.

In der Literatur kommen zahlreiche Bezeichnungen für den Begriff Dilation vor, wie z.B. *spanning ratio*, *stretch faktor*, *detour over vertices*, *distortion* oder auch *G t-approximates the complete graph* für einen Graphen  $G$  mit Dilation  $\delta_G \leq t$ . Der Einfachheit halber wird hier ausschließlich der Begriff Dilation verwendet.

## 2.5 Metriken

Im dritten Kapitel dieser Arbeit geht es um die Dilation von Delaunay-Triangulationen. Dabei werden neben der euklidischen Metrik noch zwei weitere Metriken zur Konstruktion von  $DT(S)$  zum Einsatz kommen. Aus diesem Grund folgen nun kurz ein paar interessante Bemerkungen zu dieser Thematik, wobei wir uns auf den  $\mathbb{R}^2$  beschränken.

Der Abstand zwischen zwei Punkten  $p = (p_1, p_2)$  und  $q = (q_1, q_2)$  kann auf verschiedene Weisen definiert werden, z.B. gilt für die bekannte Klasse der *Minkowski-Metriken*

$$L_i(p, q) = \sqrt[i]{|p_1 - q_1|^i + |p_2 - q_2|^i}, \quad 1 \leq i < \infty,$$

und

$$L_\infty(p, q) = \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|).$$

Für  $i = 1$  ergibt sich die sogenannte *Manhattan-Metrik*, benannt nach dem orthogonalen Straßengitter des gleichnamigen Stadtteils, und  $L_2$  ist gerade die *euklidische Metrik*.

Die Funktionen  $L_i$  erfüllen die für eine *Metrik* notwendigen Bedingungen:

1.  $L_i(p, q) \geq 0$ ,  $L_i(p, p) = 0$
2.  $L_i(p, q) = L_i(q, p)$  (Symmetriebedingung)
3.  $L_i(p, q) \leq L_i(p, l) + L_i(l, q)$  (Dreiecksungleichung)
4.  $L_i(p, q) = 0 \iff p = q$

Eine Metrik ist also eine Funktion, die je zwei Punkten eines Raums, hier die Ebene, einen reellen Wert zuordnet, der als Abstand der beiden Punkte voneinander aufgefasst werden kann. Die Minkowski-Metriken gehören zu einer Menge spezieller Metriken, die auch *symmetrische konvexe Distanzfunktionen* genannt werden. Diese werden durch Normen induziert. Der mathematische Begriff der *Norm* ist die Verallgemeinerung des geometrischen Begriffs der Länge eines Vektors. Eine Norm ist eine Funktion, die jedem Element eines Vektorraums eine reelle, nichtnegative Zahl zuordnet und eine Reihe weiterer Eigenschaften erfüllt.

Geometrisch liegt jeder symmetrischen konvexen Distanzfunktion ein Einheitskreis zu Grunde, der in Bezug auf den Nullpunkt symmetrisch ist und mit dem der Abstand zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  ermittelt werden kann. Dazu wird  $p$  auf den Nullpunkt gelegt und der Einheitskreis solange expandiert, bis der Rand des Kreises  $q$  schneidet. Der Abstand entspricht dann dem Faktor, um den der Kreis skaliert werden muss.

Ist der Einheitskreis in Bezug auf den Nullpunkt aber nicht symmetrisch, dann ist die Symmetriebedingung nicht erfüllt, und somit liegt keine Metrik mehr vor. Man spricht dann nur noch von *konvexen Distanzfunktionen*. Bei derartigen Funktionen kann der Einheitskreis jede beliebige konvexe Form annehmen mit dem Nullpunkt irgendwo im Innern.

Enthält der Rand des Einheitskreises keine Liniensegmente, dann nennt man die Distanzfunktion *streng konvex*. Bei diesen ist die Existenz flächiger Bisektoren ausgeschlossen, wie sie z.B. in der  $L_1$ -Metrik auftreten können.

Da die Bisektoren bei (symmetrischen) konvexen Distanzfunktionen im Allgemeinen keine Geraden sind, gilt für die Voronoi-Regionen einer Punktmenge  $S$ , dass sie im Allgemeinen nicht konvex sind und dass nicht jede Kante der konvexen Hülle von  $S$  eine Delaunay-Kante sein muss. Daher handelt es sich bei einer derartigen Delaunay-Triangulation nicht notwendigerweise mehr um eine Triangulation, die ja immer die Kanten der konvexen Hülle enthalten muss. Wir behalten die Bezeichnung dennoch bei, da die Abweichung zur Standard Delaunay-Triangulation minimal und für unsere Zwecke unerheblich ist.

## Kapitel 3

# Dilation von Delaunay-Triangulationen

Wenn es darum geht, eine Menge von Knotenpunkten so miteinander zu verbinden, dass die jeweiligen Entfernungen möglichst kurz sind, dann gibt es die Möglichkeit einfach alle Knotenpunkte miteinander zu verbinden. Der so entstehende vollständige Graph hat den Vorteil, dass die Entfernungen zwischen den einzelnen Knotenpunkten so kurz wie möglich sind und die Dilation den optimalen Wert 1 erreicht. Der Nachteil besteht in der hohen Komplexität durch die quadratische Anzahl an Kanten. Sollen z.B. Bahnhöfe durch ein Schienennetz miteinander verbunden werden, so ist diese Lösung aus Kostengründen nicht realisierbar.

Man wird sich also mit weniger optimalen Lösungen zufrieden geben müssen und nach Graphklassen Ausschau halten, die einen vollständigen Graphen bezüglich der Dilation möglichst gut approximieren. Die Graphen von Delaunay-Triangulationen sind planar und enthalten deshalb nur eine lineare Anzahl an Kanten. Durch diese Eigenschaft scheint diese Graphklasse zur Lösung solcher Probleme geeigneter zu sein. Die Dilation von Delaunay-Triangulationen hat allerdings nur in Sonderfällen den optimalen Wert 1. In der Regel ist ein kürzester Pfad zwischen zwei Punkten entlang den Kanten einer Delaunay-Triangulationen länger als der euklidische Abstand.

In diesem Kapitel wird anhand bereits vorliegender Ergebnisse untersucht, inwieweit sich die Dilation von Delaunay-Triangulationen durch eine Konstante nach unten und nach oben abschätzen lässt. Dabei wird nicht nur der euklidische Abstandsbegriff behandelt, sondern auch noch zwei weitere. Hinsichtlich dieser Thematik ist insbesondere zu klären, inwiefern die Ergebnisse zwischen den verschiedenen Metriken variieren.

### 3.1 Euklidische Metrik

Zuerst wird die euklidische Metrik als Abstandsbegriff betrachtet. Hierzu gibt es bereits eine Reihe von interessanten Ergebnissen. Nach ein paar kurzen Anmerkungen zur unteren Schranke, des Wertes der kleinsten oberen Schranke für die Dilation einer Delaunay-Triangulation, werden in diesem Abschnitt zwei konkrete obere Schranken präsentiert und ausführlich bewiesen.

### 3.1.1 Die untere Schranke

Sei  $S$  eine Menge von  $n$  Punkten in der euklidischen Ebene. Mit  $G$  bezeichnen wir einen Graphen der Menge  $S$ , der im folgenden die beiden Eigenschaften hat, dass jeder Knoten ein Punkt aus  $S$  ist und dass das Gewicht einer Kante dem euklidischen Abstand der beiden Punkte entspricht, die durch die Kante verbunden werden. Für zwei Punkte  $p$  und  $q$  bezeichnen wir mit  $d(p, q)$  den euklidischen Abstand und mit  $d_G(p, q)$  die Länge des kürzesten Pfades in  $G$ .

Im Kontext dazu wird mit  $DT(S)$  die Delaunay-Triangulation der Punktmenge  $S$  bezeichnet und mit  $d_{DT}(p, q)$  die Länge des kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  in  $DT(S)$ .  $\delta_{DT}(S)$  ist dann die Dilation von  $DT(S)$ .

Es sind verschiedene Konstellationen denkbar, bei denen die Dilation einer Delaunay-Triangulation den kleinsten möglichen Wert 1 hat, z.B. wenn die Punktmenge einer Delaunay-Triangulation aus maximal drei Punkten besteht. Somit ist die untere Schranke für die Dilation von Delaunay-Triangulationen trivialerweise mit 1 gegeben.

Interessanter ist die Frage, wo die größte bekannte untere Schranke für den Wert

$$\Delta_{DT} := \sup \delta_{DT}(S)$$

liegt. Ein Kandidat ist  $\pi/2$ , wie ein Beispiel zeigt (Abbildung 3.1). Seien  $p$  und  $q$  die Endpunkte des Durchmessers eines leeren Kreises. Durch Hinzunahme weiterer Punkte auf dem Rand des Kreises entstehen Delaunay-Zerlegungen, deren Dilation sich beliebig scharf  $\pi/2$  nähert [Che89]. In der Tat ist eine größere untere Schranke für  $\Delta_{DT}$  nicht bekannt.

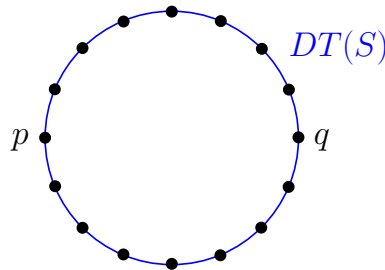


Abbildung 3.1: Obere Schranke kann nicht kleiner als  $\pi/2$  sein

Ein anderes Beispiel verdeutlicht, dass eine obere Schranke für den Wert der Dilation aller *planaren Graphen* nicht kleiner als  $\sqrt{2}$  sein kann, also  $\Delta_G \geq \sqrt{2}$ , wenn  $G$  planar ist.

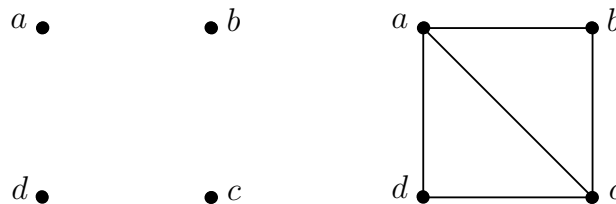


Abbildung 3.2: Obere Schranke kann nicht kleiner als  $\sqrt{2}$  sein

In Abbildung 3.2 markieren die vier Punkte  $S = \{a, b, c, d\}$  die Eckpunkte eines Quadrats. Aufgrund der Planarität darf im resultierenden Graphen höchstens eine der beiden Diagonalen  $ac$  oder  $bd$  als Kante existieren. Angenommen die Kante  $ac$  existiert, dann muss der Umweg über einen weiteren Eckpunkt in Kauf genommen werden um von  $b$  oder  $d$  zum jeweils gegenüberliegenden Eckpunkt zu gelangen. Offensichtlich ist dieser Umweg  $\sqrt{2}$ -mal so lang wie die entsprechende direkte Verbindung.

### 3.1.2 Eine erste obere Schranke

Sei  $S$  eine Menge von  $n$  Punkten in der euklidischen Ebene wie gehabt, und sei  $DT(S)$  die Delaunay-Triangulation der Punktmenge  $S$ . Mit  $d_{DT}(p, q)$  wird der kürzeste Pfad von  $p$  nach  $q$  in  $DT(S)$  bezeichnet und mit  $\delta_{DT}(S)$  die Dilation von  $DT(S)$ .

Es wird nun gezeigt, dass die Dilation einer Delaunay-Triangulation niemals größer sein kann als

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \approx 5.08.$$

Der Beweis stammt aus dem Artikel „Delaunay graphs are almost as good as complete graphs“ von David P. Dobkin, Steven J. Friedman und Kenneth J. Supowit [DFS90]. Er besteht im wesentlichen darin, für je zwei beliebige Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$  einen Pfad ausfindig zu machen, der nicht länger als

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \cdot d(p, q)$$

ist. Dazu wird ein Pfad entlang den Kanten der Delaunay-Triangulation konstruiert, der die Punkte  $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$  aus der Punktmenge  $S$  passiert und dabei den euklidischen Abstand  $d(p, q)$  möglichst gut approximiert. Zur Vereinfachung und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, die Punkte  $p, q \in S$  liegen horizontal auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems mit  $x(p) < x(q)$ .

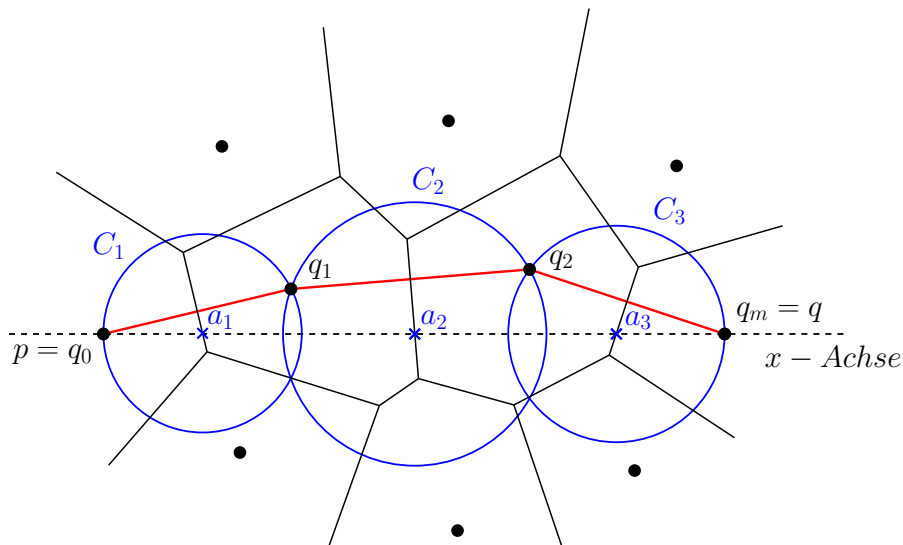


Abbildung 3.3: Der direkte  $DT$ -Pfad von  $p$  nach  $q$  (einseitig)

Die dabei nacheinander zu passierenden Voronoi-Regionen sind genau diejenigen, die von der  $x$ -Achse sequentiell von links nach rechts geschnitten werden. Mit  $a_i$  bezeichnen wir die Schnittpunkte der  $x$ -Achse mit den Voronoi-Kanten, wobei  $i = 1, \dots, m$  ist. Aus der Definition des Voronoi-Diagramms folgt, dass jedes  $a_i$  das Zentrum eines leeren Kreises  $C_i$  darstellt, dessen Rand ausschließlich die beiden Punkte  $q_{i-1}$  und  $q_i$  aus  $S$  enthält, es sei denn  $a_i$  ist ein Voronoi-Knoten. Der auf diese Weise konstruierte Pfad von  $p$  nach  $q$  wird als *direkter DT-Pfad* von  $p$  nach  $q$  bezeichnet. (Abbildung 3.3)

Der direkte  $DT$ -Pfad wird *einseitig* genannt, wenn er entweder nur ober- oder unterhalb der  $x$ -Achse verläuft. Andernfalls muss er durch beide Halbebenen verlaufen und heißt *nicht einseitig*. Für einseitige direkte  $DT$ -Pfade kann die Relation von Pfadlänge zum euklidischen Abstand höchstens den Wert  $\pi/2$  annehmen, was unmittelbar aus den nachstehenden Lemmata 3.1 und 3.3 gefolgert werden kann.

Zwei offensichtliche Eigenschaften des direkten  $DT$ -Pfades zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  aus  $S$  halten Lemma 3.1 und 3.2 fest.

**Lemma 3.1** *Gegeben sei eine  $n$ -elementige Punktmenge  $S$  mit  $p, q \in S$  und ein direkter  $DT$ -Pfad von  $p$  nach  $q$ , der die Punkte  $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$  aus  $S$  passiert. Dann gilt*

$$x(q_0) \leq x(q_1) \leq \dots \leq x(q_m).$$

**Beweis.** Betrachten wir den Bisektor der Punkte  $q_{i-1}$  und  $q_i$  aus  $S$ , der  $a_i$  enthält. Dann liegt der Punkt  $q_{i-1}$  links und der Punkt  $q_i$  rechts des Bisektors. Daraus folgt  $x(q_{i-1}) \leq x(q_i)$ . ■

**Lemma 3.2** *Gegeben sei eine  $n$ -elementige Punktmenge  $S$  mit  $p, q \in S$  und ein direkter  $DT$ -Pfad von  $p$  nach  $q$ , der die Punkte  $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$  aus  $S$  passiert. Für alle  $i$  mit  $0 \leq i \leq m$  gilt, dass  $q_i \in S$  entweder im Innern oder auf dem Rand des Kreises mit Durchmesser  $pq$  liegt.*

**Beweis.** Liegt ein Punkt außerhalb des Kreises mit Durchmesser  $pq$ , dann wird die zugehörige Voronoi-Region vom Durchmesser weder berührt noch geschnitten. Für drei Punkte kann dieser Sachverhalt anhand Abbildung 3.4 gut nachvollzogen werden.

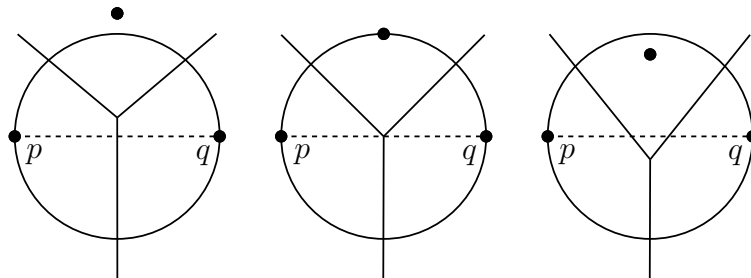


Abbildung 3.4: Durchmesser und Voronoi-Region





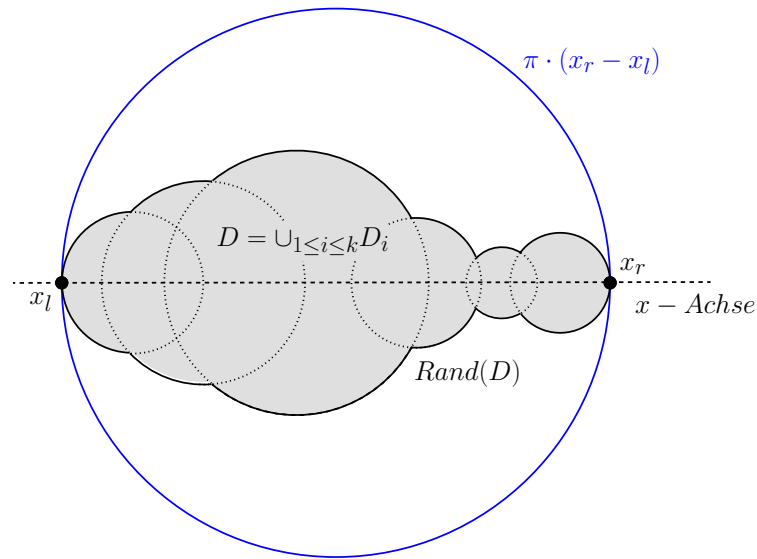


Abbildung 3.6: Veranschaulichung zu Lemma 3.3

**Beweis.** Es wird ein Induktionsbeweis über die Variable  $k$  geführt. Der Fall im Induktionsanfang  $k = 1$  ist klar. Sei also  $k > 1$  und nehmen wir an, Lemma 3.3 gilt für  $k - 1$ . Im Induktionsschritt muss nun gezeigt werden, dass daraus auch die Richtigkeit für  $k$  folgt. Betrachten wir dazu die folgende Abbildung.

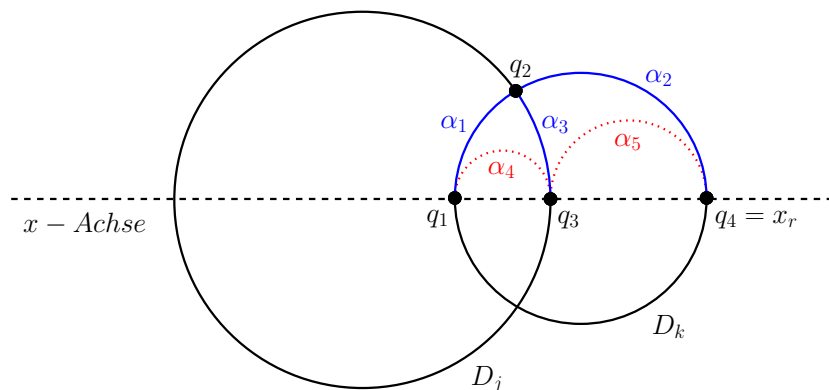


Abbildung 3.7: Zum Beweis von Lemma 3.3

Mit  $q_1$  und  $q_4$  wird hier jeweils der am weitesten links- bzw. rechtsliegende Punkt von  $D_k$  bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $q_4 = x_r$ . Mit  $q_2$  wird der Schnittpunkt von  $D_k$  mit einem anderen Kreis  $D_j$ ,  $j < k$ , bezeichnet und mit  $q_3$  der am weitesten rechtsliegende Punkt von  $D_j$  auf der  $x$ -Achse. Wir können annehmen, dass  $D_k$  keinen anderen Kreis  $D_i$ ,  $i \neq k$ , vollständig umfasst. Andernfalls wäre die Induktion trivial, da  $D_i$  nichts zum Rand von  $D$  beitragen würde. Mit  $\alpha_1$  ( $\alpha_2$ ) wird die Länge des Bogens auf dem Rand des Kreises  $D_k$  im Uhrzeigersinn von  $q_1$  nach  $q_2$  (von  $q_2$  nach  $q_4$ ) bezeichnet und mit  $\alpha_3$  die Länge des Bogens im Uhrzeigersinn von  $q_2$  nach  $q_3$  auf dem Rand des Kreises  $D_j$ . Schließlich sei  $\alpha_4$  die Länge des oberen Halbkreises mit Durchmesser  $x(q_3) - x(q_1)$  und  $\alpha_5$  die Länge des oberen Halbkreises mit Durchmesser  $x(q_4) - x(q_3)$ , also  $\alpha_4 = (\pi/2)(x(q_3) - x(q_1))$  und  $\alpha_5 = (\pi/2)(x(q_4) - x(q_3))$ . Simple

hieraus abgeleitete geometrische Eigenschaften sind

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq \alpha_4$$

und

$$\alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

da der Umfang der beiden Kreise mit Durchmesser  $x(q_3) - x(q_1)$  und  $x(q_4) - x(q_3)$  zusammenaddiert dem Umfang des Kreises  $D_k$  entspricht. Es folgt

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 \geq \alpha_4 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Das bedeutet

$$\alpha_3 + \alpha_5 \geq \alpha_2.$$

Sei  $Rand(D)$  die Länge des Randes von  $D$ , und sei  $Kreis(q_i, q_j)$  der Kreis mit Durchmesser  $q_i q_j$ . Dann ergibt sich nun

$$\begin{aligned} Rand(D) &\leq Rand\left(Kreis(q_3, q_4) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq k-1} D_i\right) \\ &\leq Rand(Kreis(q_3, q_4)) + Rand\left(\bigcup_{1 \leq i \leq k-1} D_i\right) \\ &\leq \pi(x_r - x(q_3)) + \pi(x(q_3) - x_l) \\ &\leq \pi(x_r - x_l). \end{aligned}$$

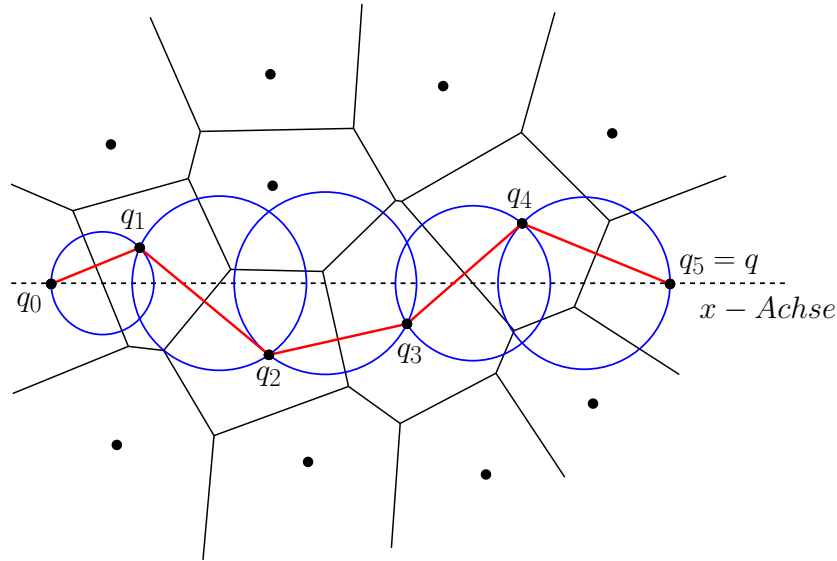
Damit ist der Beweis vollbracht. ■

Da eine direkte Verbindung zwischen zwei Punkten auf dem Rand eines Kreises immer kürzer ist als die Bogenlänge, besteht das Fazit der Lemmata 3.1 und 3.3 darin, dass ein einseitiger direkter  $DT$ -Pfad ( $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$ ) nicht länger sein kann als die Hälfte des Randes von  $C$ , wenn  $C$  die Vereinigung der Kreise  $C_i$  ist, deren Rand jeweils die Punkte  $q_{i-1}$  und  $q_i$  enthält und deren Kreismittelpunkte auf dem Liniensegment  $pq$  liegen (Abbildung 3.3). Dadurch ist die Relation von Pfadlänge zum euklidischen Abstand zweier Punkte durch den Wert  $\pi/2$  nach oben beschränkt, wie eingangs bereits erwähnt. Sei  $DT(S)$  eine Delaunay-Triangulation, bei der alle möglichen direkten  $DT$ -Pfade zwischen je zwei Punkten  $p$  und  $q$  aus  $S$  einseitig sind, und sei  $U$  der Umfang des jeweiligen Kreises mit Durchmesser  $pq$ , der  $C$  - also die Vereinigung der Kreise  $C_i$  - genau umschließt (Abbildung 3.6). Dann folgt

$$\frac{Rand(C)}{2} \leq \frac{U}{2} = \frac{\pi \cdot d(p, q)}{2} \quad \text{und} \quad \delta_{DT}(S) \leq \frac{\pi \cdot d(p, q)}{d(p, q)} = \frac{\pi}{2}.$$

Die Dilation einer Delaunay-Triangulation mit ausschließlich einseitigen direkten  $DT$ -Pfadern ist demzufolge durch  $\pi/2$  nach oben beschränkt.

Problematischer ist die Behandlung von nicht einseitigen direkten  $DT$ -Pfadern zwischen zwei Punkten. Bei diesen wird unter Umständen eine Umformung des Pfades notwendig, um die Pfadlänge zu verringern. Welche maximale Pfadlänge sich ergeben kann, wenn der direkte  $DT$ -Pfad im Zickzackweg beliebig oft die obere und untere Halbebene entlang der  $x$ -Achse abwechselnd durchläuft, wird nun ausführlich diskutiert. Ein Beispiel für einen nicht einseitigen direkten  $DT$ -Pfad ist in Abbildung 3.8 gegeben.


 Abbildung 3.8: Der direkte  $DT$ -Pfad von  $p$  nach  $q$  (nicht einseitig)

Die Grundidee zur Konstruktion eines Pfades, dessen Gesamtlänge kürzer ist als der ursprüngliche nicht einseitige direkte  $DT$ -Pfad besteht darin, den Pfad jeweils so lange wie möglich innerhalb einer Halbebene laufen zu lassen. Wenn der direkte  $DT$ -Pfad die  $x$ -Achse kreuzt und somit die Halbebene wechselt, wird zunächst bestimmt, wie kostspielig der Übergang in die andere Halbebene ist. Ist der Übergang - in einem noch zu definierendem Sinn - nicht zu teuer, so lassen wir den direkten  $DT$ -Pfad ohne Änderungen weiter laufen. Andernfalls wird eine Art Abkürzung zum nächsten Punkt innerhalb der gleichen Halbebene konstruiert. Im folgenden Theorem wird die maximale Länge des Pfades präzisiert. Die Hauptaufgabe des anschließenden Beweises besteht natürlich darin zu zeigen, dass die Länge der Abkürzung nach oben beschränkt ist, also hält, was sie verspricht und zur möglichst kurzen Gesamtlänge des Pfades beiträgt.

**Theorem 3.4** Gegeben sei die Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  mit  $p, q \in S$ . Dann existiert ein Pfad von  $p$  nach  $q$  der Länge

$$\leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \cdot d(p, q).$$

Für die Dilation gilt infolgedessen

$$\delta_{DT}(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_{DT}(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \approx 5.08.$$

**Beweis.** Zuerst wird der direkte  $DT$ -Pfad von  $p = q_0$  nach  $q = q_m$  konstruiert. Dann werden, falls bestimmte Voraussetzungen gegeben sind, die Abkürzungen eingefügt, die sich entweder komplett oberhalb oder aber komplett unterhalb der  $x$ -Achse befinden, je nach dem wo der Punkt  $q_1$  liegt. Daran anschließend erfolgt die Analyse der Pfadlänge. Die zentrale Frage wird dabei sein, ob eine Abkürzung einem Wechsel der Halbebene vorzuziehen ist.

Es wird zunächst der Fall behandelt, in dem die Abkürzungen oberhalb der  $x$ -Achse eingefügt werden. Sei  $q_i$  ein Punkt innerhalb eines direkten  $DT$ -Pfades, so dass

1.  $y(q_i) \geq 0$
2.  $i < m$
3.  $y(q_{i+1}) < 0$ .

Wir befinden uns also an einem Punkt oberhalb der  $x$ -Achse, hinter dem der direkte  $DT$ -Pfad ( $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$ ) die Halbebene wechselt und die  $x$ -Achse nach unten kreuzt. Sei  $j$  der kleinste Index größer als  $i$ , so dass wieder  $y(q_j) \geq 0$  gilt. In folgender Abbildung ist z.B.  $i = 1$  und  $j = 4$ .

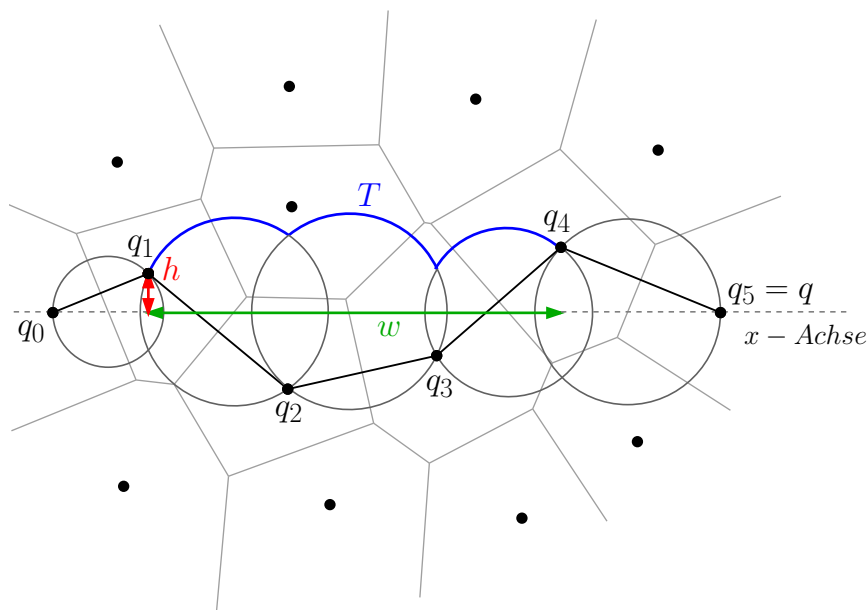


Abbildung 3.9: Markierung von  $T$ ,  $w$  und  $h$

Sei  $C$  wieder die Vereinigung der Kreise  $C_i$ , deren Rand jeweils die Punkte  $q_{i-1}$  und  $q_i$  des direktern  $DT$ -Pfades enthält und deren Kreismittelpunkte auf dem Liniensegment  $pq$  liegen. Dann wird mit  $T$  das Teilstück des Randes von  $C$  bezeichnet, das im Uhrzeigersinn von  $q_i$  nach  $q_j$  verläuft. Die Projektion von  $T$  auf die  $x$ -Achse wird mit  $w$  bezeichnet. Es gilt also  $w = x(q_j) - x(q_i)$ . Weiter sei  $h = \min \{y(b) : b \text{ liegt auf } T\}$ .

Die Bedingung

$$h \leq \frac{w}{4}$$

wird als *shortcut condition* bezeichnet. Sie bestimmt den weiteren Pfadverlauf, indem sie darüber entscheidet, ob eine Abkürzung zwischen  $q_i$  und  $q_j$  zum Einsatz kommt oder nicht. Wenn die Bedingung  $h \leq w/4$  erfüllt ist, dann wechseln wir die Halbebene und folgen dem direkten  $DT$ -Pfad nach  $q_j$  entlang den Kanten  $q_i q_{i+1}, q_{i+1} q_{i+2}, \dots, q_{j-1} q_j$ . Andernfalls nehmen wir eine Abkürzung, die wie folgt konstruiert wird.

Zuerst wird die untere konvexe Hülle  $q_i = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = q_j$  der Menge

$$\{b \in S \mid x(q_i) \leq x(b) \leq x(q_j) \text{ und } y(b) \geq 0 \text{ und } b \text{ liegt unterhalb } q_i q_j\}$$

gebildet. Hierbei ist klar, dass die Kanten der konvexen Hülle nicht Bestandteil des direkten  $DT$ -Pfades von  $p$  nach  $q$  sein können, da der direkte  $DT$ -Pfad an dieser Stelle auf der gegenüberliegenden Halbebene verläuft.

Die Abkürzung besteht nun letztendlich darin, jeweils den direkten  $DT$ -Pfad von  $z_k$  nach  $z_{k+1}$  für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n - 1$  zu nehmen.

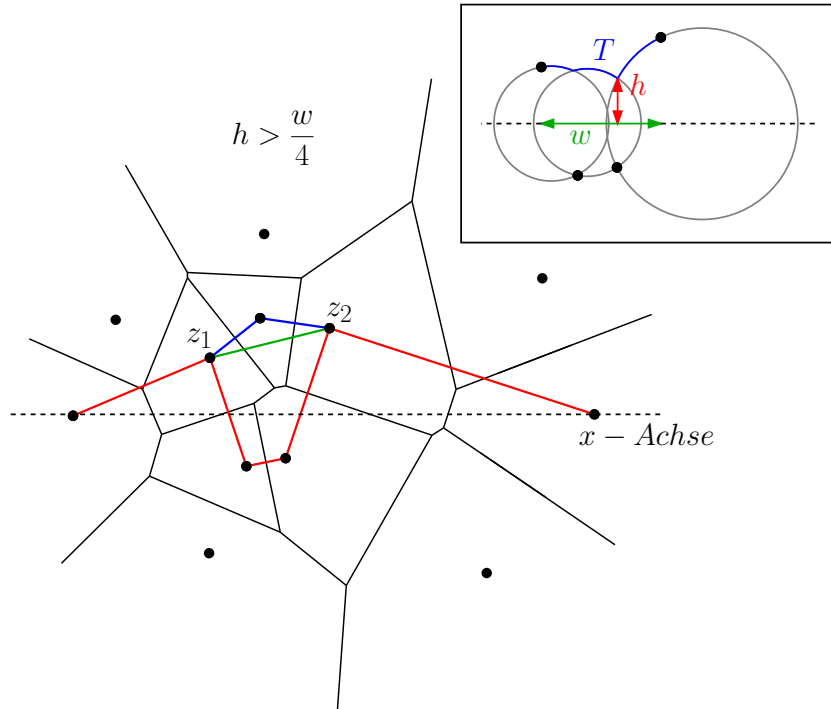


Abbildung 3.10: Der direkte  $DT$ -Pfad (rot) mit unterer konvexer Hülle (grün) und Abkürzung (blau)

Halten wir noch einmal fest. Wenn  $h$  im Verhältnis zu  $w$  klein ist, dann wird der reguläre direkte  $DT$ -Pfadverlauf eingehalten und die  $x$ -Achse gekreuzt. Ist  $h$  im Verhältnis zu  $w$  groß, dann lohnt sich der mit der Kreuzung der  $x$ -Achse verbundene Umweg nicht. Der direkte  $DT$ -Pfadverlauf wird unterbrochen, und die beiden resultierenden Pfadstücke werden durch eine Abkürzung miteinander verbunden. Die Abkürzung besteht dabei wiederum aus lauter direkten  $DT$ -Pfadern. Damit bleibt der Pfad auf derselben Halbebene. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts dient Abbildung 3.11.

Links ist  $h \leq w/4$ . Somit ist die shortcut condition erfüllt, und es wird keine Abkürzung zwischen  $q_i$  und  $q_j$  eingefügt. Die Route taucht unter die  $x$ -Achse und folgt dem  $DT$ -Pfad.

Rechts ist  $h > w/4$ . Die shortcut condition ist nicht erfüllt. Somit wird eine Abkürzung zwischen  $q_i$  und  $q_j$  eingefügt. Der  $DT$ -Pfad wird unterbrochen, und die Route taucht nicht unter die  $x$ -Achse.

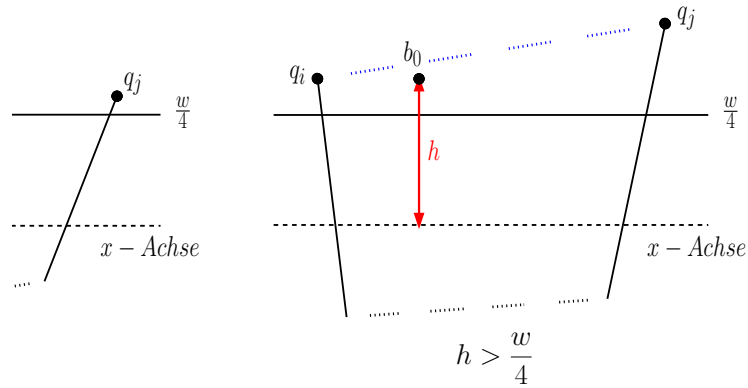


Abbildung 3.11: Zusammenhang zwischen Abkürzung und Größe von  $h$

Werden die Abkürzungen unterhalb der  $x$ -Achse eingefügt, so ist die Vorgehensweise analog. Neben  $q_i \leq 0$  und  $y(q_{i+1}) > 0$  ist dann natürlich auch  $y(q_j) \leq 0$ , und  $T$  läuft folglich entgegen dem Uhrzeigersinn von  $q_i$  nach  $q_j$ . Auch ändert sich die Definition von  $h$  zu

$$h = \max \{y(b) : b \text{ liegt auf } T\}.$$

Außerdem muss nun die obere konvexe Hülle  $q_i = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = q_j$  aus der Menge

$$\{b \in S \mid x(q_i) \leq x(b) \leq x(q_j) \text{ und } y(b) \leq 0 \text{ und } b \text{ liegt oberhalb } q_i q_j\}$$

gebildet werden.

Die Schlüsselaussage zur Abschätzung der Länge einer Abkürzung liegt im folgenden Lemma, dessen Beweis im Anschluss an den laufenden Beweis nachgereicht wird.

**Lemma 3.5** *Sei  $z_k z_{k+1}$  eine Kante der unteren oder oberen konvexen Hülle wie soeben beschrieben. Dann ist der direkte DT-Pfad von  $z_k$  nach  $z_{k+1}$  einseitig.*

Kommen wir nun zur Analyse der Länge des Pfadstückes von  $q_i$  nach  $q_j$ , so wie es durch die oben dargelegte Vorgehensweise erzeugt wird. Dabei muss unterschieden werden, ob das Pfadstück eine Abkürzung oder Teil des direkten  $DT$ -Pfades ist. Zuerst wird der Fall betrachtet, in dem das Pfadstück dem direkten  $DT$ -Pfad entspricht.

*Fall 1:* Sei also  $h \leq w/4$ .

Es folgt zunächst die Einführung einiger neuer Bezeichnungen, die anhand Abbildung 3.12 leicht nachvollzogen werden können. Sei  $t$  die Länge von  $T$ , womit das Teilstück des Randes von  $C$  bezeichnet wurde, dass im Uhrzeigersinn von  $q_i$  nach  $q_j$  verläuft (Abbildung 3.9), und sei  $b_0$  der Punkt mit kleinstem  $y$ -Wert auf  $T$ . Mit  $t_i$  wird die Länge von  $q_i$  nach  $b_0$  auf  $T$  bezeichnet und mit  $t_j$  die Länge von  $b_0$  nach  $q_j$  auf  $T$ , also  $t_i + t_j = t$ . Die jeweiligen Projektionen von  $t_i$  und  $t_j$  auf die  $x$ -Achse bezeichnen wir mit  $w_i$  und  $w_j$ , womit sich  $w_i + w_j = w$  ergibt.

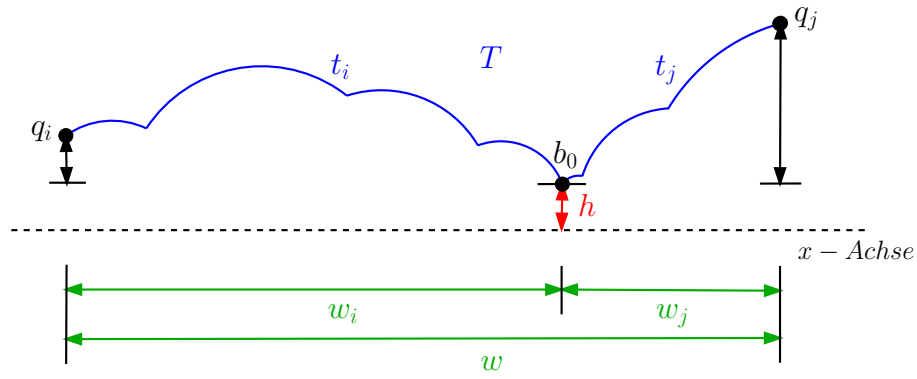
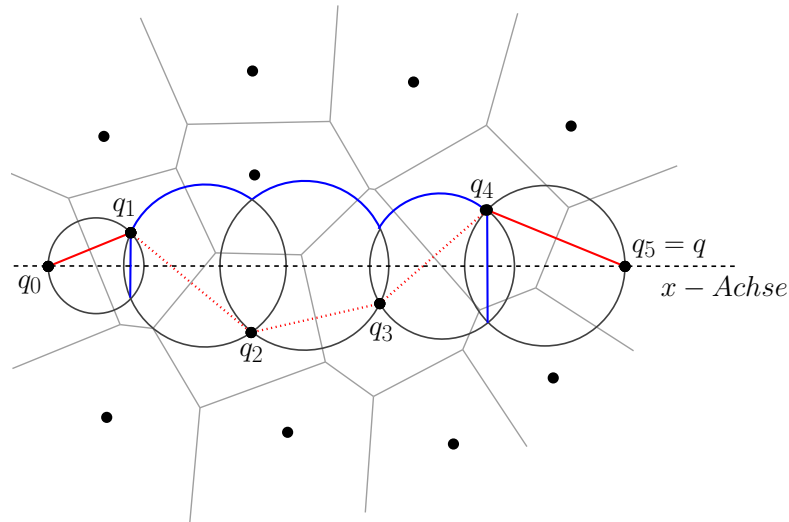


Abbildung 3.12: Zur Analyse der Pfadlänge (ohne Abkürzung)

Die Länge des Pfadstückes, in diesem Fall also ohne Abkürzung, kann damit abgeschätzt werden. Zur Verdeutlichung dient Abbildung 3.13 mit  $q_i = q_1$  und  $q_j = q_4$ , in der ersichtlich ist, dass der in rot gepunktete Teil des direkten  $DT$ -Pfadestück durch die in blau markierte Route nach oben beschränkt ist.


 Abbildung 3.13: Obere Schranke für das direkte  $DT$ -Pfadstück

Das direkte  $DT$ -Pfadstück hat also höchstens die Länge

$$\begin{aligned}
 t + 2(y(q_i) + y(q_j)) &= t + 2(2h + (y(q_i) - h) + (y(q_j) - h)) \\
 &\leq t + 2\left(\frac{w}{2} + (y(q_i) - h) + (y(q_j) - h)\right) \\
 &= t + 2\left(\frac{w_i}{2} + (y(q_i) - h) + \frac{w_j}{2} + (y(q_j) - h)\right) \\
 &\leq t + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} t_i + \frac{\sqrt{5}}{2} t_j\right) \\
 &= t(1 + \sqrt{5}).
 \end{aligned}$$



Die letzte Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass

$$a + \frac{b}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} c$$

für jedes rechtwinklige Dreieck mit Katheten  $a$ ,  $b$  und Hypotenuse  $c$  gilt, wobei sowohl  $a \leq b$  als auch  $b < a$  sein kann (Abbildung 3.14). Da die Allgemeingültigkeit dieser Ungleichung nicht sofort ersichtlich ist, wird sie nun kurz unter Verwendung des Pythagorischen Lehrsatzes hergeleitet.

$$\begin{aligned} & 0 \leq (a - 2b)^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leq a^2 - 4ab + 4b^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \frac{1}{4}a^2 - ab + b^2 \\ \Leftrightarrow & ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow & ab \leq \frac{5}{4}a^2 - a^2 + \frac{5}{4}b^2 - \frac{1}{4}b^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 \leq \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 \leq \frac{5}{4}(a^2 + b^2) \\ \Leftrightarrow & a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 \leq \frac{5}{4}c^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{4} \leq \frac{5}{4}c^2 \\ \Leftrightarrow & \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}c^2 \\ \Leftrightarrow & a + \frac{b}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}c \end{aligned}$$

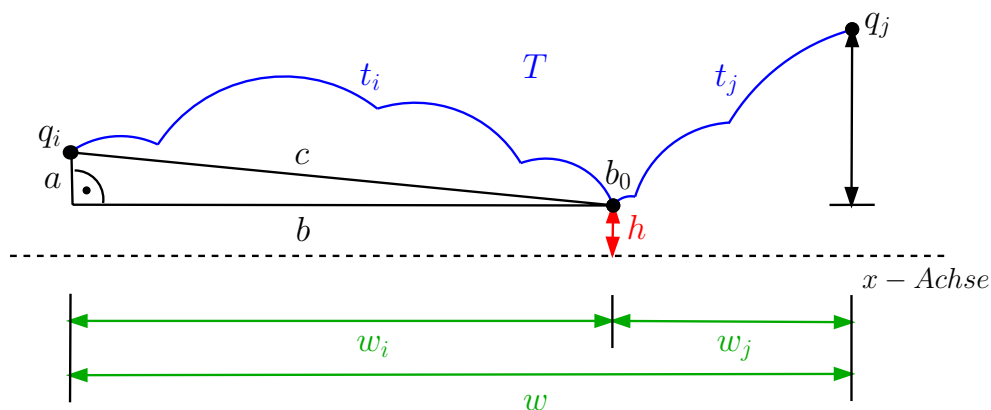


Abbildung 3.14:  $a + \frac{b}{2} \leq \frac{\sqrt{5}}{2} c$

*Fall 2:* Sei nun  $h > w/4$ .

Dann nehmen wir die Abkürzung, die wegen Lemma 3.5 höchstens

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{Länge des einseitigen direkten } DT\text{-Pfades von } z_k \text{ nach } z_{k+1}$$

lang ist und wegen Lemma 3.3

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d(z_k, z_{k+1})\pi}{2} \leq \frac{t\pi}{2}$$

ist. Daher ist die Länge des Pfadstückes von  $q_i$  nach  $q_j$  in beiden Fällen höchstens  $(1 + \sqrt{5})t$ . Der komplette direkte  $DT$ -Pfad ( $p = q_0, q_1, \dots, q_{m-1}, q_m = q$ ) kann nun nach oben abgeschätzt werden.

Verläuft der direkte  $DT$ -Pfad einseitig, dann ist die Länge durch  $(\pi/2)d(p, q)$  beschränkt. Nehmen wir also an, der direkte  $DT$ -Pfad verläuft nicht einseitig. Dann existieren Abschnitte, in denen der direkte  $DT$ -Pfad entweder die  $x$ -Achse kreuzt und die Halbebene wechselt oder in denen eine Abkürzung eingefügt wird. Diese Abschnitte sind durch  $(1 + \sqrt{5})t$  nach oben beschränkt. Die verbleibenden  $DT$ -Pfadstücke befinden sich innerhalb einer Halbebene und sind jeweils durch  $T$  miteinander verbunden (Abbildung 3.9). Wegen Lemma 3.3 ist diese zusammengesetzte Route durch  $(\pi/2)d(p, q)$  beschränkt, die nun aber noch mit dem Faktor  $(1 + \sqrt{5})$  multipliziert werden muss, um die Abkürzungen bzw. das Wechseln der Halbebene des direkten  $DT$ -Pfades zu berücksichtigen. Somit ergibt sich summa summarum eine insgesamt Pfadlänge von höchstens

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \cdot d(p, q).$$

■

Der Vollständigkeit halber folgt nun noch der Beweis von Lemma 3.5.

**Beweis von Lemma 3.5.** Zur Illustration des Beweises sei zunächst auf Abbildung 3.15 verwiesen. Es wird also angenommen, die Abkürzung liegt oberhalb der  $x$ -Achse und die Kanten  $z_k z_{k+1}$  sind Elemente der unteren konvexen Hülle. Der Fall, dass die Kanten  $z_k z_{k+1}$  unterhalb der  $x$ -Achse liegen und somit Elemente der oberen konvexen Hülle sind, geht analog.

Wegen Lemma 3.2 liegt der direkte  $DT$ -Pfad von  $z_k$  nach  $z_{k+1}$  jeweils vollständig innerhalb des Kreises mit Durchmesser  $z_k z_{k+1}$ . Es wird nun exemplarisch für jedes  $k$  mit  $0 \leq k \leq n - 1$  gezeigt, dass der direkte  $DT$ -Pfad von  $z_k$  nach  $z_{k+1}$  einseitig ist, indem nachgewiesen wird, dass sich keine Punkte aus  $S$  im unteren Halbkreis des Kreises mit Durchmesser  $z_k z_{k+1}$  befinden können, da andernfalls diese Punkte Bestandteil der unteren konvexen Hülle wären.

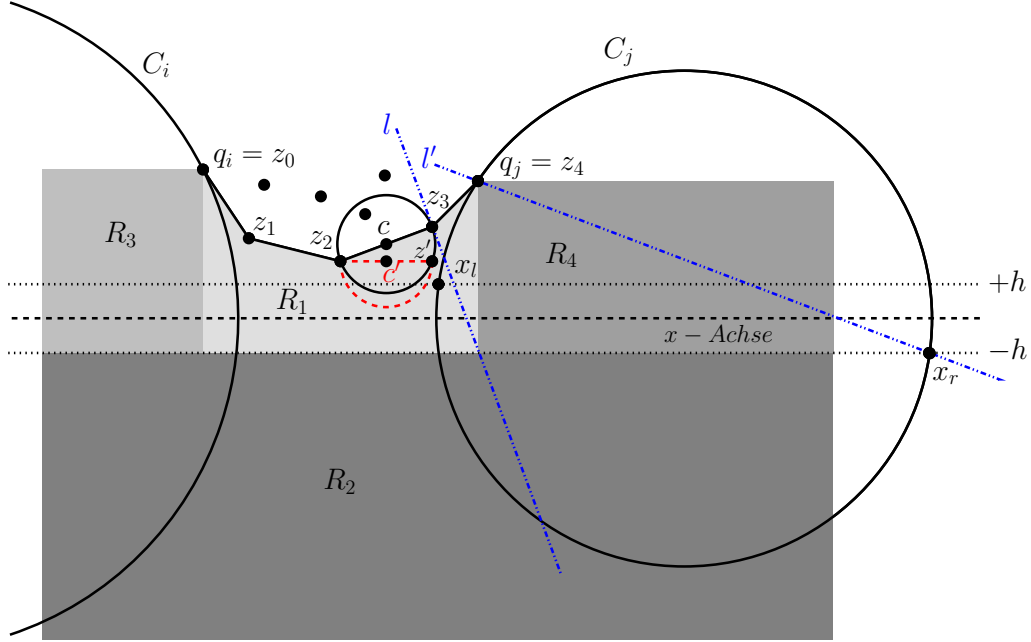


Abbildung 3.15: Zum Beweis von Lemma 3.5

Angenommen  $b$  sei ein willkürlicher Punkt in diesem unteren Halbkreis. Dann muss gezeigt werden, dass  $b$  nicht in der Punktmenge  $S$  enthalten sein kann. Der Beweis für  $b \notin S$  ist gelungen, wenn nachgewiesen werden kann, dass  $b$  in keiner der Regionen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  liegt, die in Abbildung 3.15 unterschiedlich grau schattiert sind.

Wenn  $x(q_i) \leq x(b) \leq x(q_j)$  und  $y(b) \geq -h$ , dann liegt  $b$  in Region  $R_1$ , und wir behaupten  $b \notin S$ . Wäre nämlich  $y(b) \geq h$ , dann würde  $b$  außerhalb der unteren konvexen Hülle liegen, und wäre  $-h < y(b) < h$ , dann würde  $b$  innerhalb von  $\cup_{i \leq k \leq j} C_k$  liegen, was der Definition des Voronoi-Diagramms widersprechen würde, da der Rand eines jeden Kreises  $C_i$  zwar die Punkte  $q_{i-1}$  und  $q_i$  schneidet, aber keine Punkte im Innern enthalten kann.

Als nächstes zeigen wir, dass  $y(b) > -h$  sein muss und somit  $b \notin R_2$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $y(z_k) \leq y(z_{k+1})$  angenommen werden. Da  $z_k \in S$ , muss  $z_k$  oberhalb von  $T$  liegen, denn die Fläche zwischen  $T$  und  $x$ -Achse befindet sich komplett in  $C$  und innerhalb dieser Fläche können keine Punkte aus  $S$  enthalten sein, wie bereits erwähnt. Demzufolge haben wir  $y(z_k) \geq h > w/4$ . Sei  $z'$  der Punkt mit den Koordinaten  $(x(z_{k+1}), y(z_k))$ . In Abbildung 3.15 ist  $z'$  bezüglich der Kante  $z_2 z_3$  eingezeichnet. Weiter bezeichnen wir mit  $c$  und  $c'$  jeweils die Mittelpunkte der Segmente  $z_k z_{k+1}$  und  $z_k z'$ , wobei  $y(c') > w/4$  ist. Wegen  $b \in \text{Kreis}(z_k, z_{k+1})$  und  $y(b) \leq y(z_k) = y(z')$  folgt  $b \in \text{Kreis}(z_k, z')$ . Außerdem ist  $x(z_{k+1}) - x(z_k) \leq w$ , da beim beidseitigen verlängern der Kante  $z_k z_{k+1}$  beide Enden auf  $T$  treffen und  $T$  zusammenhängend ist sowie die Projektion von  $T$  auf die  $x$ -Achse mindestens so lang ist wie die Projektion der Kante  $z_k z_{k+1}$ . Somit ist der Radius des Kreises  $\text{Kreis}(z_k, z')$  nicht länger als  $w/2$ . Insgesamt folgt daraus

$$y(b) \geq y(c') - \text{Radius}(\text{Kreis}(z_2, z')) > \frac{w}{4} - \frac{w}{2} = -\frac{w}{4} > -h,$$

wobei  $x(b) \geq x(q_i)$ . Dadurch ist auch gleich der Fall  $b \notin R_3$  gezeigt, bedingt durch unsere Annahme  $y(z_k) \leq y(z_{k+1})$ .

Als letztes nehmen wir  $x(b) > x(q_j)$  an, also  $b \in R_4$ . Es wird gezeigt, dass  $b$  im Innern des Kreises  $C_j$  liegt, was  $b \notin S$  impliziert. Sei  $x_l$  der am weitesten links liegende Schnittpunkt des Kreises  $C_j$  mit der Geraden  $y = h$ , und sei  $x_r$  der am weitesten rechts liegende Schnittpunkt des Kreises  $C_j$  mit der Geraden  $y = -h$ . Mit  $l$  bezeichnen wir die Gerade, die senkrecht zur Kante  $z_k z_{k+1}$  verläuft und den Punkt  $z_{k+1}$  schneidet (in Abbildung 3.15 bezüglich der Kante  $z_2 z_3$  eingezeichnet), und  $l'$  ist die Gerade, die durch die Punkte  $q_j$  und  $x_r$  verläuft. Sowohl  $l$  als auch  $l'$  haben eine negative Steigung. Der vollständige Kreis mit Durchmesser  $z_k z_{k+1}$  liegt unterhalb der Geraden  $l$  und somit insbesondere auch der Punkt  $b$ . Wir behaupten, dass aufgrund dieser Tatsache  $b$  auch unterhalb der Geraden  $l'$  liegt. Um das zu erkennen, ist zu beachten, dass die Annahme  $y(z_k) \leq y(z_{k+1})$  bedeutet, dass  $y(z_{k+1}) \leq y(q_j)$ , was aus der Definition einer konvexen Hülle folgt. Daher schneidet die Gerade  $l$  die Gerade  $x = x(q_j)$  unterhalb des Punktes  $q_j$ . Folglich genügt es für die beiden Geraden  $l$  und  $l'$ , deren Steigungen beide negativ sind, zu zeigen, dass  $\text{Steigung}(l) \leq \text{Steigung}(l')$  ist. Wäre nämlich die Steigung der Geraden  $l$ , die senkrecht zur Kante  $z_k z_{k+1}$  verläuft und den Punkt  $z_{k+1}$  schneidet, größer als die der Geraden  $l'$ , dann würde der Punkt  $z_k$  entweder im Innern des Kreises  $C_j$  liegen oder aber unterhalb von  $h$ , was beides nicht sein darf. Für  $\text{Steigung}(l) = \text{Steigung}(l')$  fällt der Punkt  $z_k$  mit dem Punkt  $x_l$  zusammen, was gerade noch erlaubt ist. Aufgrund des Monotonieverhaltens der Steigungen aller Kanten in der unteren konvexen Hülle ergibt sich  $\text{Steigung}(z_k z_{k+1}) \leq \text{Steigung}(x_l q_j)$ . Da weiter  $l$  senkrecht zur Kante  $z_k z_{k+1}$  verläuft und - weil  $x_l$  und  $x_r$  wie beim Durchmesser genau gegenüberliegen -  $l'$  auch senkrecht zum Segment  $x_l q_j$ , folgt  $\text{Steigung}(l) \leq \text{Steigung}(l')$ . Somit liegt  $b$  in der Tat unterhalb von  $l'$ . Da  $b$  gleichzeitig innerhalb der Region  $R_4$  liegt, muss  $b$  im Innern des Kreises  $C_j$  liegen und kann deshalb kein Punkt aus  $S$  sein. ■

### 3.1.3 Die kleinste bekannte obere Schranke

Kommen wir nun zur bis dato kleinsten bekannten oberen Schranke für die Dilation von Delaunay-Triangulationen in der euklidischen Metrik. Sie wird in dem Artikel „Classes of graphs which approximate the complete Euclidean graph“ von J. Mark Keil und Carl A. Gutwin [KG92] vorgestellt und hat den Wert

$$\frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 2.42.$$

Der Beweis gestaltet sich äußerst schwierig und ist sehr mathematisch. Er besteht aus einem Lemma und einem Theorem. Das Lemma leistet dabei technische Vorarbeit für das anschließende Theorem, in dem die Schranke konkretisiert wird.

Sei  $S$  eine Menge von  $n$  Punkten in der euklidischen Ebene. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir wieder an, die Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$  liegen horizontal auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems, wobei die  $x$ -Koordinate von  $p$  kleiner als die von  $q$  ist. Das folgende bereits angekündigte Lemma liefert eine obere Schranke für  $d_{DT}(p, q)$ , allerdings unter Einschränkungen.

**Lemma 3.6** *Gegeben sei die Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  mit den beiden Punkten  $p, q \in S$ , die horizontal auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen, wobei die  $x$ -Koordinate von  $p$  kleiner als die von  $q$  ist. Sei weiter  $C$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O$  und Radius  $r$ , dessen Rand die Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$  schneidet, und sei  $\theta$  der obere Winkel  $pOq$  (Abbildungen 3.16 - 3.18). Liegt kein Punkt aus  $S$  im Innern von  $C$  unterhalb der  $x$ -Achse, dann ist*

$$d_{DT}(p, q) \leq r\theta,$$

wobei  $r\theta$  der obere Bogenabschnitt des Kreises  $C$  von  $p$  nach  $q$  ist.

**Beweis.** Wenn gar kein Punkt aus  $S$  in  $C$  enthalten ist, dann ist das Liniensegment  $pq$  eine Delaunay-Kante und es ergibt sich der einfache Fall

$$d_{DT}(p, q) = d(p, q) \leq r\theta.$$

Hierbei sei an die Eigenschaft erinnert, dass ein leerer Kreis durch die Endpunkte jeder Kante einer Delaunay-Triangulation existiert, vorausgesetzt die Delaunay-Triangulation ist tatsächlich eine Triangulation, wovon wir ja aber bekanntlich ausgehen.

Der Fall, in dem Punkte aus  $S$  in  $C$  enthalten sind, erfordert etwas mehr Anstrengung, wobei natürlich nur die Variante untersucht werden muss, bei der sich - wie im Lemma vorausgesetzt - die Punkte aus  $S$  oberhalb der  $x$ -Achse durch  $p$  und  $q$  befinden. Sei nun  $b \in S$  ein Punkt in  $C$  oberhalb der  $x$ -Achse, der auf dem Rand eines Kreises  $D$  liegt, dessen Rand außerdem die Punkte  $p$  und  $q$  schneidet, aber keine Punkte aus  $S$  oberhalb der  $x$ -Achse im Innern enthält. Solch einen Kreis  $D$  muss es geben, denn falls mehrere Punkte in  $C$  oberhalb der  $x$ -Achse existieren, dann bestimmt man einfach nacheinander den Punkt aus  $S$  mit der kleinsten positiven  $y$ -Koordinate, bis man schließlich einen Punkt  $b$  gefunden hat, so dass der Kreis  $D$  durch die drei Punkte  $p$ ,  $q$  und  $b$  keine Punkte oberhalb des Liniensegmentes  $pq$  enthält.

Zum besseren Verständnis der weiteren Ausführungen sollten zunächst die folgenden drei Abbildungen 3.16, 3.17 und 3.18 betrachtet werden. In ihnen sind verschiedene Szenarien skizziert, was die Lage des Punktes  $b$  anbelangt.

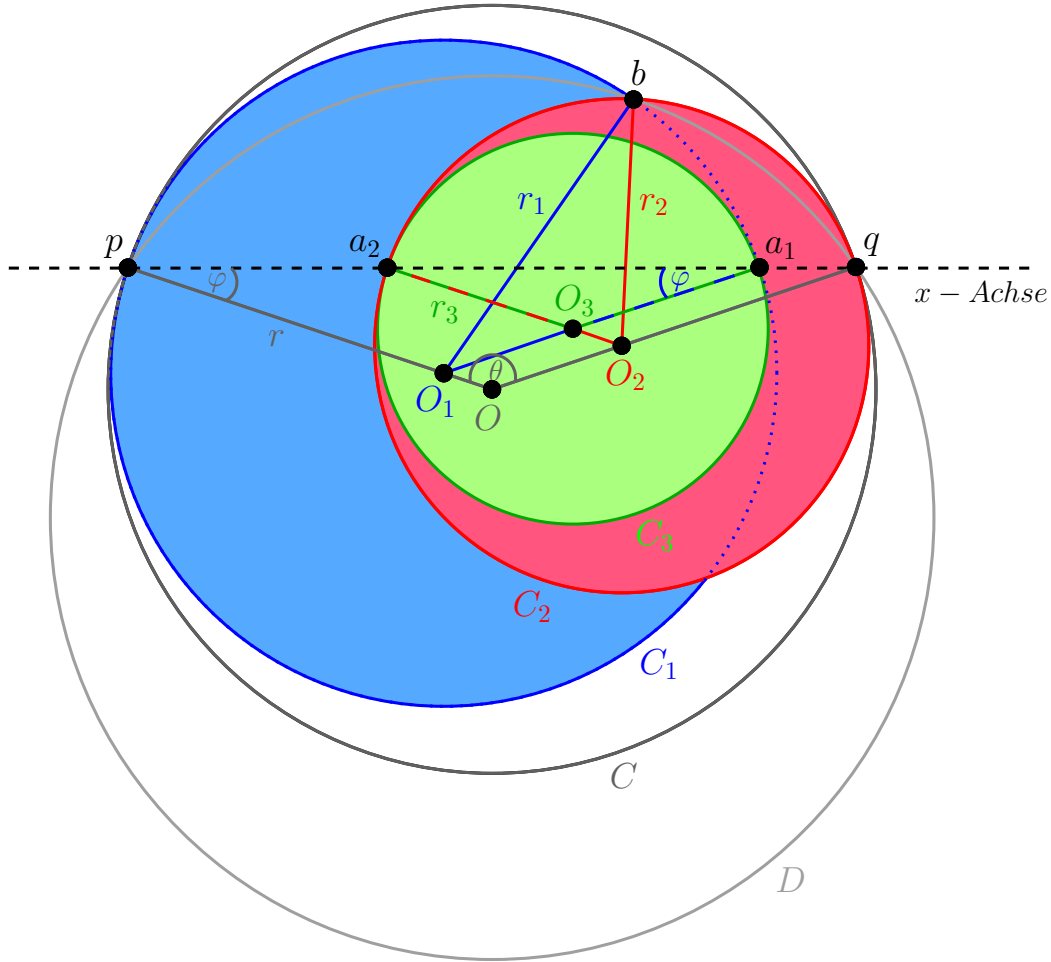


Abbildung 3.16: Zum Beweis von Lemma 3.6

Wie aus den Abbildungen zu entnehmen ist, soll  $C_1$  ein Kreis mit Radius  $r_1$  sein, der durch die Punkte  $p$  und  $b$  verläuft und dessen Mittelpunkt  $O_1$  auf dem Liniensegment  $pO$  liegt. Das Pendant zu  $C_1$  ist der Kreis  $C_2$  mit Radius  $r_2$ , der durch die Punkte  $b$  und  $q$  verläuft und dessen Mittelpunkt  $O_2$  auf dem Liniensegment  $Oq$  liegt. Die Existenz der beiden Kreise  $C_1$  und  $C_2$  ist dadurch gesichert, dass der Punkt  $b$  im Innern des Kreises  $C$  liegt, wodurch  $r_1 < r$  und  $r_2 < r$  folgt. Weiter seien  $a_1$  und  $a_2$  die jeweiligen inneren Schnittpunkte der Kreise  $C_1$  und  $C_2$  mit dem Liniensegment  $pq$ . Durch die Punkte  $a_1$  und  $a_2$  verläuft schließlich der Kreis  $C_3$  mit Radius  $r_3$ , dessen Mittelpunkt  $O_3$  auf dem Schnittpunkt der Liniensegmente  $O_1a_1$  und  $O_2a_2$  liegt. Da dieser Schnittpunkt zu  $a_1$  und  $a_2$  denselben Abstand hat, liegt an der Parallelität von  $pO$  und  $a_2O_2$  sowie von  $qO$  und  $a_1O_1$ . Dadurch hat der Winkel  $a_2O_3a_1$  dieselbe Größe wie  $pOq$ . Da zudem  $a_1$  und  $a_2$  auf dem Liniensegment  $pq$  liegen, muss der Abstand von  $a_1$  und  $a_2$  zu dem Schnittpunkt der Liniensegmente  $O_1a_1$  und  $O_2a_2$  gleich sein.

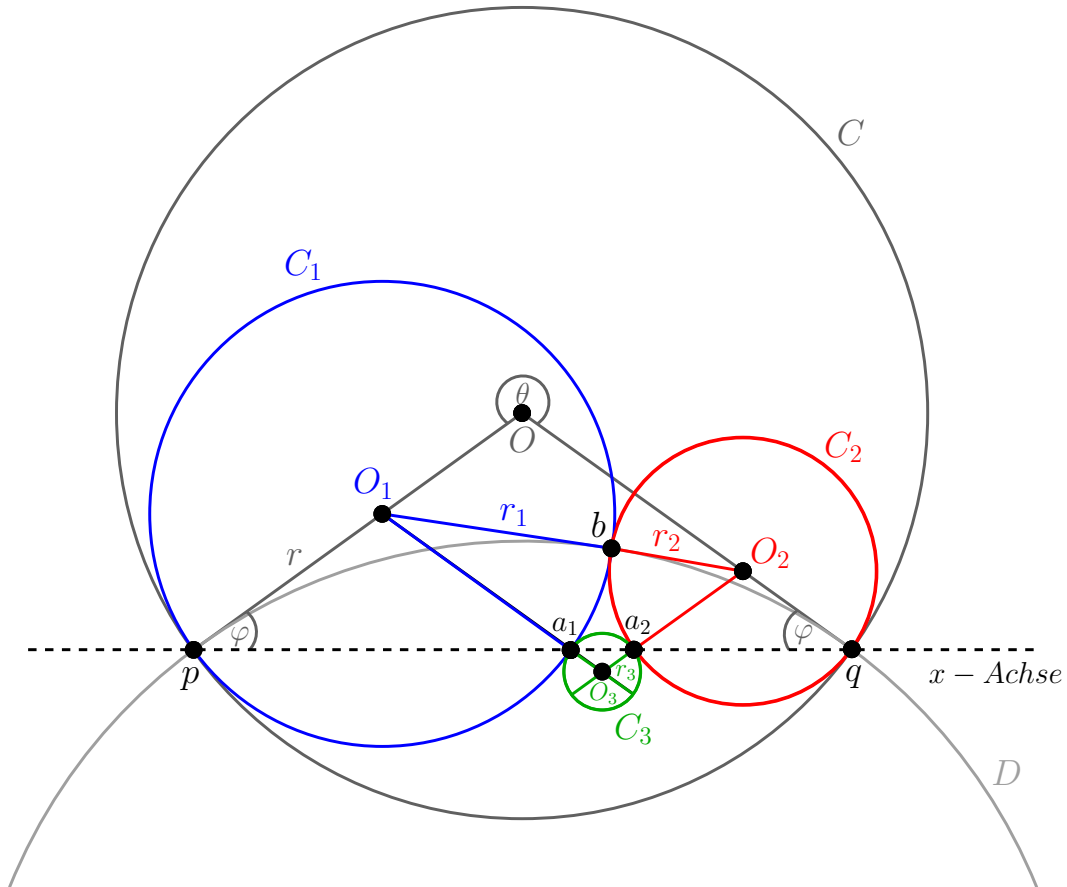


Abbildung 3.17: Zum Beweis von Lemma 3.6

Die inneren Schnittpunkte der Kreise  $C_1$  und  $C_2$  mit der  $x$ -Achse entstehen abhängig von der Lage der Punkte  $p$ ,  $q$  und  $b$ . So kommt es in den Abbildungen 3.16 und 3.18 zu einer Situation, in der sich  $a_2$  links von  $a_1$  befindet. In Abbildung 3.17 hingegen befindet sich  $a_1$  links von  $a_2$ .

Aus diesen Konstellationen können durch Anwendung elementarer geometrischer Lehrsätze ganz allgemein die folgenden drei Fakten abgeleitet werden.

- *Fakt 1:* In  $C_1$  liegt unterhalb des Liniensegmentes  $pb$  kein Punkt aus der Menge  $S$ . Ebenso liegt kein Punkt aus  $S$  in  $C_2$  unterhalb des Liniensegmentes  $bq$ . Das folgt einerseits aus der Definition des Kreises  $C$ , der die Kreise  $C_1$  und  $C_2$  vollständig im Innern enthält, aber keine Punkte aus  $S$  unterhalb des Liniensegmentes  $pq$  und andererseits aus der Definition des Kreises  $D$ , dessen Rand durch die drei Punkte  $p$ ,  $q$  und  $b$  verläuft und der somit die Liniensegmente  $pb$  und  $bq$  enthält, aber keine Punkte aus  $S$  oberhalb des Liniensegmentes  $pq$ .

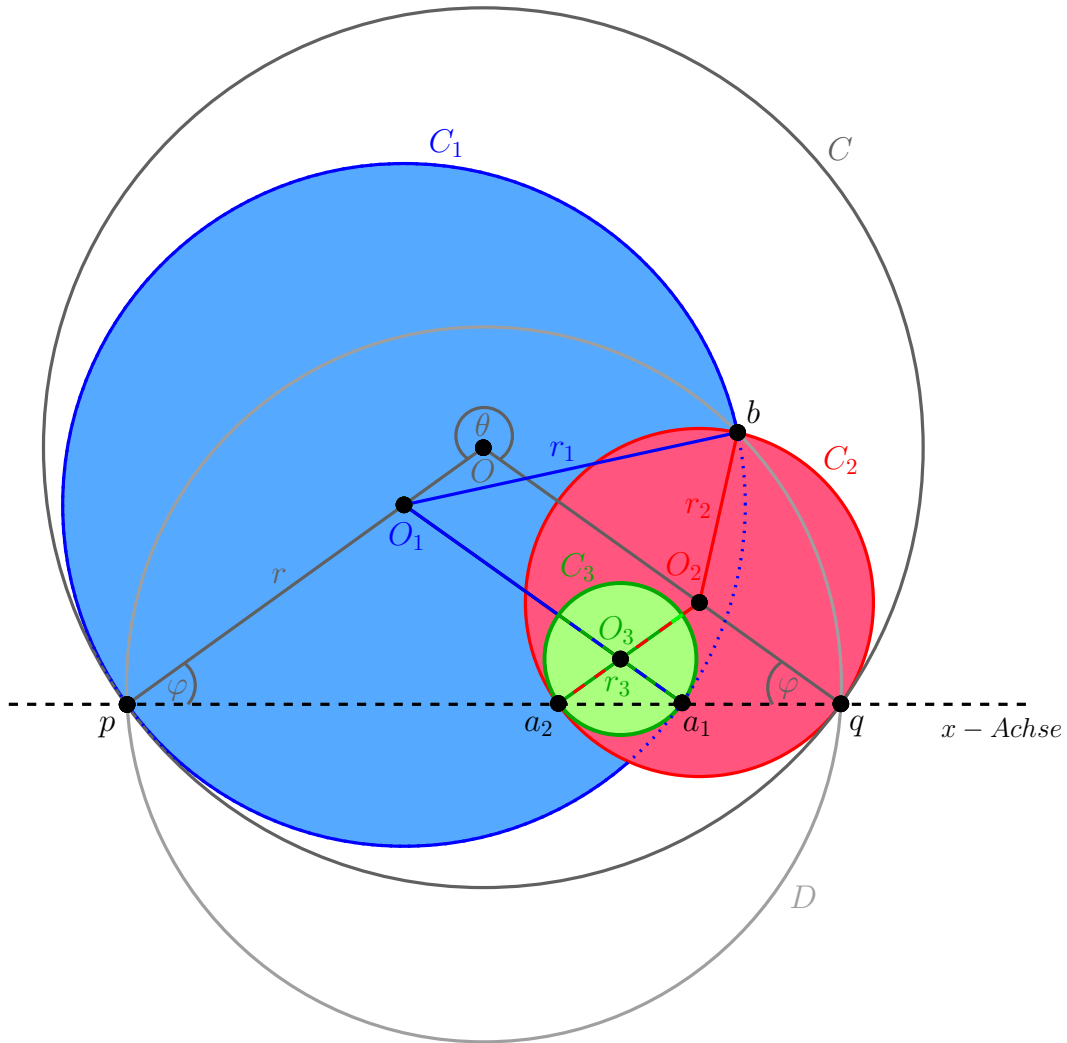


Abbildung 3.18: Zum Beweis von Lemma 3.6

- *Fakt 2:* Die Dreiecke  $pOq$ ,  $pO_1a_1$ ,  $a_2O_2q$  und  $a_2O_3a_1$  sind gleichschenkelig und haben alle gleich große gegenüberliegende Basiswinkel  $\varphi$ , was an der bereits angesprochenen Parallelität von  $pO$  und  $a_2O_2$  sowie von  $qO$  und  $a_1O_1$  liegt. Demzufolge haben auch die oberen Winkel  $pOq$ ,  $pO_1a_1$  und  $a_2O_2q$  alle die gleiche Größe wie  $\theta$ . Befindet sich  $a_2$  links von  $a_1$ , dann hat zudem der obere Winkel  $a_2O_3a_1$  die gleiche Größe wie  $\theta$ .
- *Fakt 3:* Für die Dreiecke  $pO_1a_1$ ,  $a_2O_2q$ ,  $a_2O_3a_1$  und  $pOq$  ergibt sich nach Einsetzen der entsprechenden Werte in den Kosinussatz und anschließendem Auflösen nach  $\cos \varphi$  die Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{d(p, a_1)}{2r_1} = \frac{d(a_2, q)}{2r_2} = \frac{d(a_2, a_1)}{2r_3} = \frac{d(p, q)}{2r}.$$



Der nächste Schritt besteht aus einer Transformation des Kreises  $C$  in einen Kreis  $C'$  mit Radius  $r'$  und Mittelpunkt  $O'$ . Der Rand von  $C'$  verläuft dabei durch die Punkte  $p$  und  $q$  sowie durch einen dritten Punkt  $z \in S$ , der sich unterhalb der  $x$ -Achse befindet. Gleichzeitig wird die Forderung aufrechterhalten, dass kein Punkt aus  $S$  im Innern von  $C'$  unterhalb der  $x$ -Achse liegt. In der folgenden Abbildung 3.19 ist diese Transformation dargestellt.

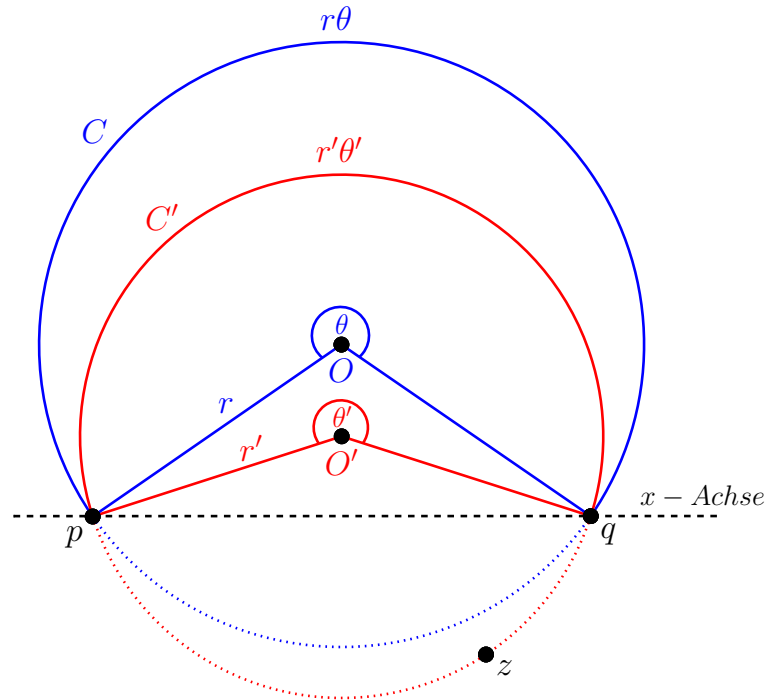


Abbildung 3.19: Transformation von  $C$  nach  $C'$

Sei  $\theta$  der obere Winkel  $pOq$  wie gehabt, und sei  $\theta'$  der obere Winkel  $pO'q$ . Dann folgt  $r'\theta' \leq r\theta$ , was daran liegt, dass der Punkt  $z \in S$  unterhalb der  $x$ -Achse und nicht in  $C$  liegt. Somit ist es zum Beweis von Lemma 3.6 ausreichend, anstelle des Kreises  $C$  fortan den transformierten Kreis  $C'$  zu verwenden. Gibt es keinen Punkt  $z \in S$  unterhalb der  $x$ -Achse, dann ist das Liniensegment  $pq$  Teil der konvexen Hülle von  $S$ , also eine Delaunay-Kante, womit sich  $d_{DT}(p, q) = d(p, q) \leq r\theta$  ergibt. Für den restlichen Verlauf des Beweises wird daher angenommen, dass mindestens ein Punkt  $z \in S$  unterhalb der  $x$ -Achse existiert und  $C$  derart transformiert wurde, dass dessen Rand durch die drei Punkte  $p, q, z \in S$  verläuft und unterhalb der  $x$ -Achse leer ist.

Insgesamt gibt es für eine  $n$ -elementige Punktmenge  $O(n^3)$  mögliche Transformationen eines Kreises  $C$  in einen Kreis  $C'$ , wie in Abbildung 3.19 beispielhaft skizziert. Das mag auf den ersten Blick viel erscheinen, wo eine Delaunay-Triangulation doch nur aus einer linearen Anzahl an Kanten besteht. Aber hier ist nicht die Kantenzahl von  $DT(S)$  entscheidend, sondern die Anzahl möglicher Verbindungen zwischen je zwei Punkten, und davon gibt es  $O(n^2)$ . Da es für jede dieser  $O(n^2)$  Verbindungen zwischen je zwei Punkten wiederum  $O(n)$  mögliche Punkte gibt, die dem oben definierten Punkt  $z$  entsprechen, kommt man de facto auf  $O(n^3)$  Transformationen. Die Menge der transformierten Kreise nennen wir  $\mathfrak{C}$ .

Die transformierten Kreise der Menge  $\mathfrak{C}$  werden nun der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit  $C$  anstelle  $C'$  bezeichnet. Desgleichen wird für die Winkel  $\theta'$  vereinfachend  $\theta$  geschrieben.

Bei  $O(n^3)$  transformierten Kreisen gibt es natürlich auch  $O(n^3)$  obere Winkel  $\theta$ , die der Größe nach sortiert werden können. Über die Größe der Winkel  $\theta$  der transformierten Kreise in  $\mathfrak{C}$  wird jetzt ein Induktionsbeweis geführt.

Den Induktionsanfang bildet dabei der transformierte Kreis  $C \in \mathfrak{C}$  mit dem kleinsten möglichen Winkel  $\theta$ . Dieser Kreis muss leer sein, denn sollte  $C$  nicht leer sein und einen Punkt  $b \in S$  oberhalb der  $x$ -Achse in seinem Innern enthalten, dann lässt sich der bereits weiter oben definierte Kreis  $C_1$  mit Mittelpunkt  $O_1$  auf dem Liniensegment  $pO$  bilden (Abbildungen 3.16 - 3.18), dessen Rand durch die Punkte  $p$  und  $b$  verläuft, wie die folgende Abbildung veranschaulicht.

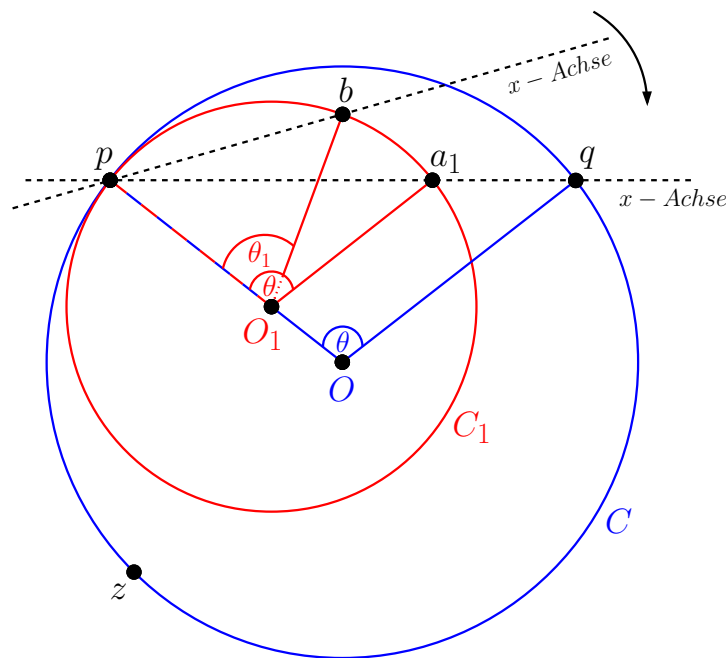


Abbildung 3.20: Transformierter Kreis  $C$  hat nicht den kleinsten möglichen Winkel  $\theta$

Wegen Fakt 1 kann kein Punkt aus  $S$  im Innern von  $C_1$  unterhalb des Liniensegmentes  $pb$  existieren, und mit Fakt 2 ergibt sich

$$\theta_1 = \angle pO_1b \leq \angle pO_1a_1 = \theta.$$

Aber das widerspricht der Annahme, dass  $C$  den kleinsten möglichen oberen Winkel  $\theta$  enthält. Werfen wir dazu einen Blick auf Abbildung 3.20. Wird die Szene gedreht, bis die Punkte  $p$  und  $b$  horizontal auf einer Linie liegen, dann ist  $C_1$  ein Kreis, der zu einem Kreis  $C$  der Menge  $\mathfrak{C}$  transformiert werden kann mit  $p, b$  und  $z$  auf dem Rand und dessen Winkel  $\theta$  dann kleiner ist als der Winkel  $\theta$  des Kreises  $C$  in Abbildung 3.20. Je nach Lage des Punktes  $z$  kann es auch notwendig sein, anstelle der Transformation des Kreises  $C_1$  die Transformation des Kreises  $C_2$  mit Mittelpunkt  $O_2$  auf dem Liniensegment  $Oq$  zu betrachten, dessen Rand die Punkte  $b$  und  $q$  enthält. Auf jeden Fall muss  $C$  leer sein, und es folgt  $d_{DT}(p, q) = d(p, q) \leq r\theta$ .

Kommen wir nun zum Induktionsschritt. Sei dazu  $C \in \mathfrak{C}$  eine konkrete Transformation mit einem Punkt  $b \in S$  im Innern oberhalb der  $x$ -Achse, und nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass Lemma 3.6 für alle transformierten Kreise mit kleinerem Winkel  $\theta$  gilt. Zurückgreifend auf Fakt 2 ergeben sich die Ungleichungen

$$\theta_1 = pO_1b < pO_1a_1 = \theta$$

und

$$\theta_2 = bO_2q < a_2O_2q = \theta.$$

Mit Fakt 1 und der Induktionsvoraussetzung folgt daraus

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\leq d_{DT}(p, b) + d_{DT}(b, q) \\ &\leq r_1\theta_1 + r_2\theta_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Betrachten wir als nächstes die Region  $\bar{C}_3$ , die sich im Innern von  $C_3$  oberhalb der  $x$ -Achse befindet und die Region  $\bar{C}_{12}$ , die sich aus der oberhalb der  $x$ -Achse liegenden Schnittmenge von  $C_1$  und  $C_2$  ergibt. In Abbildung 3.21 sind die Regionen  $\bar{C}_3$  und  $\bar{C}_{12}$  unterschiedlich grau schattiert.

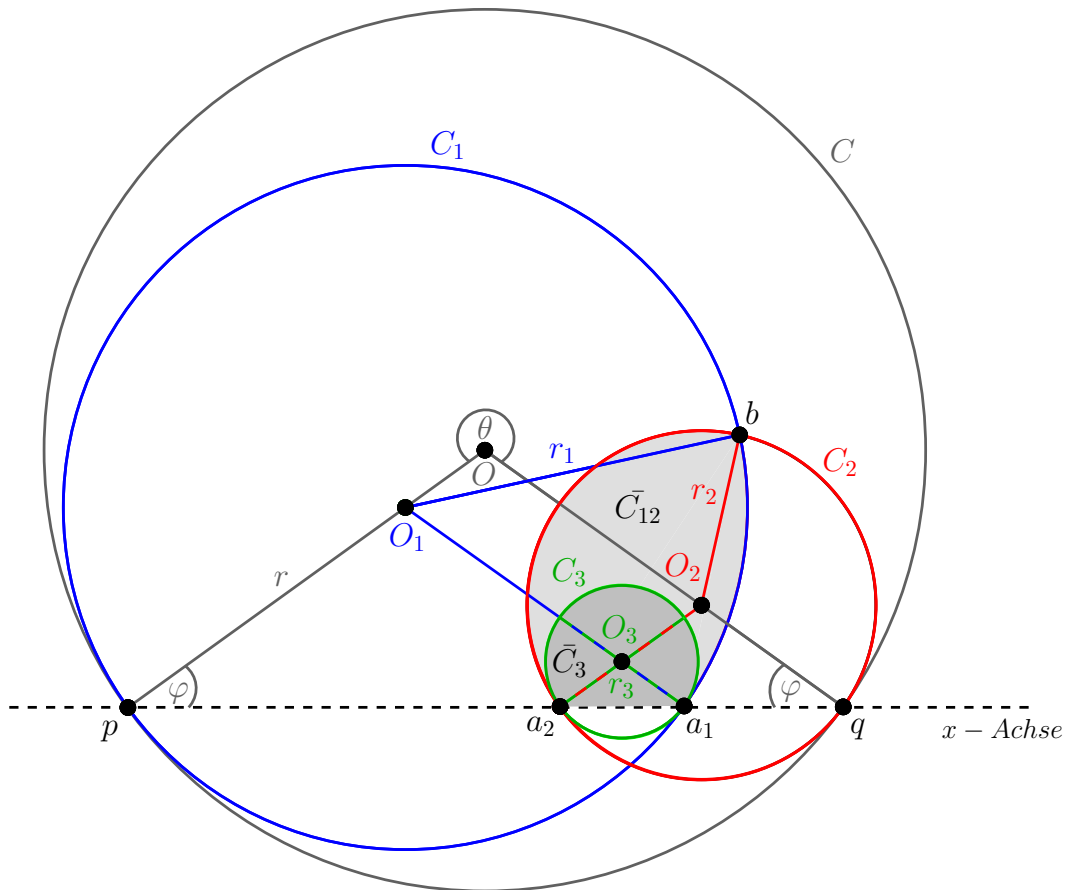


Abbildung 3.21: Die Regionen  $\bar{C}_{12}$  und  $\bar{C}_3$

Die Fälle, ob  $a_2$  links oder rechts von  $a_1$  liegt, müssen unterschieden werden, denn davon hängt die Existenz der Region  $\bar{C}_{12}$  ab.

Fall 1:  $a_2$  liegt links von  $a_1$

Wenn  $a_2$  links von  $a_1$  liegt, dann existiert die Region  $\bar{C}_{12}$  definitiv, und sie enthält dann auch die Region  $\bar{C}_3$  vollständig im Innern. Sowohl  $\bar{C}_3$  als auch  $\bar{C}_{12}$  sind konvex. Bezeichne  $L(X)$  die Länge des Randes einer konvexen Fläche  $X$ . Dann ist  $L(\bar{C}_3) < L(\bar{C}_{12})$ , da der Rand einer konvexen Fläche, die wie hier echt in einer anderen konvexen Fläche enthalten ist, kürzer sein muss als der Rand der sie umschließenden konvexen Fläche. Genauer

$$\begin{aligned} L(\bar{C}_3) &= r_3\theta + d(a_2, a_1) \\ &< L(\bar{C}_{12}) &= r_1\theta - r_1\theta_1 + r_2\theta - r_2\theta_2 + d(a_2, a_1) \\ &= r_1(\theta - \theta_1) + r_2(\theta - \theta_2) + d(a_2, a_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit  $\theta_1 = pO_1b$  und  $\theta_2 = bO_2q$  wie bereits definiert. Die restlichen Schritte sind nunmehr rein handwerklicher Natur und bestehen darin, in bereits vorhandene Gleichungen die entsprechenden Daten einzusetzen und auszurechnen.

Aus (3.1) und (3.2) folgt

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\stackrel{(3.1)}{\leq} r_1\theta_1 + r_2\theta_2 \\ &= r_1(\theta - (\theta - \theta_1)) + r_2(\theta - (\theta - \theta_2)) \\ &= r_1\theta + r_2\theta - [r_1(\theta - \theta_1) + r_2(\theta - \theta_2)] \\ &\stackrel{(3.2)}{<} r_1\theta + r_2\theta - r_3\theta \\ &= (r_1 + r_2 - r_3)\theta, \end{aligned}$$

und wenn die Gleichungen von Fakt 3 jeweils nach dem Radius aufgelöst werden, dann ergibt sich wie erwünscht

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\leq (r_1 + r_2 - r_3)\theta \\ &= \left( \frac{d(p, a_1)}{2 \cos \varphi} + \frac{d(a_2, q)}{2 \cos \varphi} - \frac{d(a_2, a_1)}{2 \cos \varphi} \right) \theta \\ &= \frac{d(p, q)\theta}{2 \cos \varphi} \\ &= r\theta. \end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch der Fall, in dem sich  $a_2$  rechts von  $a_1$  befindet.

Fall 2:  $a_2$  liegt rechts von  $a_1$

Dann ist wegen (3.1) analog wie oben

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\stackrel{(3.1)}{\leq} r_1\theta_1 + r_2\theta_2 \\ &\leq r_1\theta + r_2\theta \\ &= (r_1 + r_2)\theta, \end{aligned}$$

und Fakt 3 impliziert wiederum

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\leq (r_1 + r_2)\theta \\ &= \left( \frac{d(p, a_1)}{2 \cos \varphi} + \frac{d(a_2, q)}{2 \cos \varphi} \right) \theta \\ &\leq \frac{d(p, q)\theta}{2 \cos \varphi} \\ &= r\theta. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 3.6 bewiesen. ■

Wir sind nun in der Lage, das Haupttheorem dieses Abschnitts zu beweisen, welches die kleinste bisher bekannte obere Schranke für die Dilation einer Delaunay-Triangulation in der euklidischen Metrik angibt.

**Theorem 3.7** *Gegeben sei die Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  mit  $p, q \in S$ . Dann gilt für die Dilation*

$$\delta_{DT}(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_{DT}(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 2.42.$$

**Beweis.** Zunächst sei auf Abbildung 3.22 verwiesen, in der alle wichtigen Angaben für den Beweis enthalten sind. Sei also  $C_1$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O_1$  oberhalb der  $x$ -Achse, und sei  $C_2$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $O_2$  unterhalb der  $x$ -Achse, so dass die Ränder von  $C_1$  und  $C_2$  die Punkte  $p$  und  $q$  enthalten und die Winkel  $qpO_1$ ,  $pqO_1$ ,  $qpO_2$  und  $pqO_2$  alle den gleichen Wert  $\pi/6$  haben. Der Rand des Kreises  $C_1$  verläuft somit durch  $O_2$  und der Rand von  $C_2$  dementsprechend durch  $O_1$ .

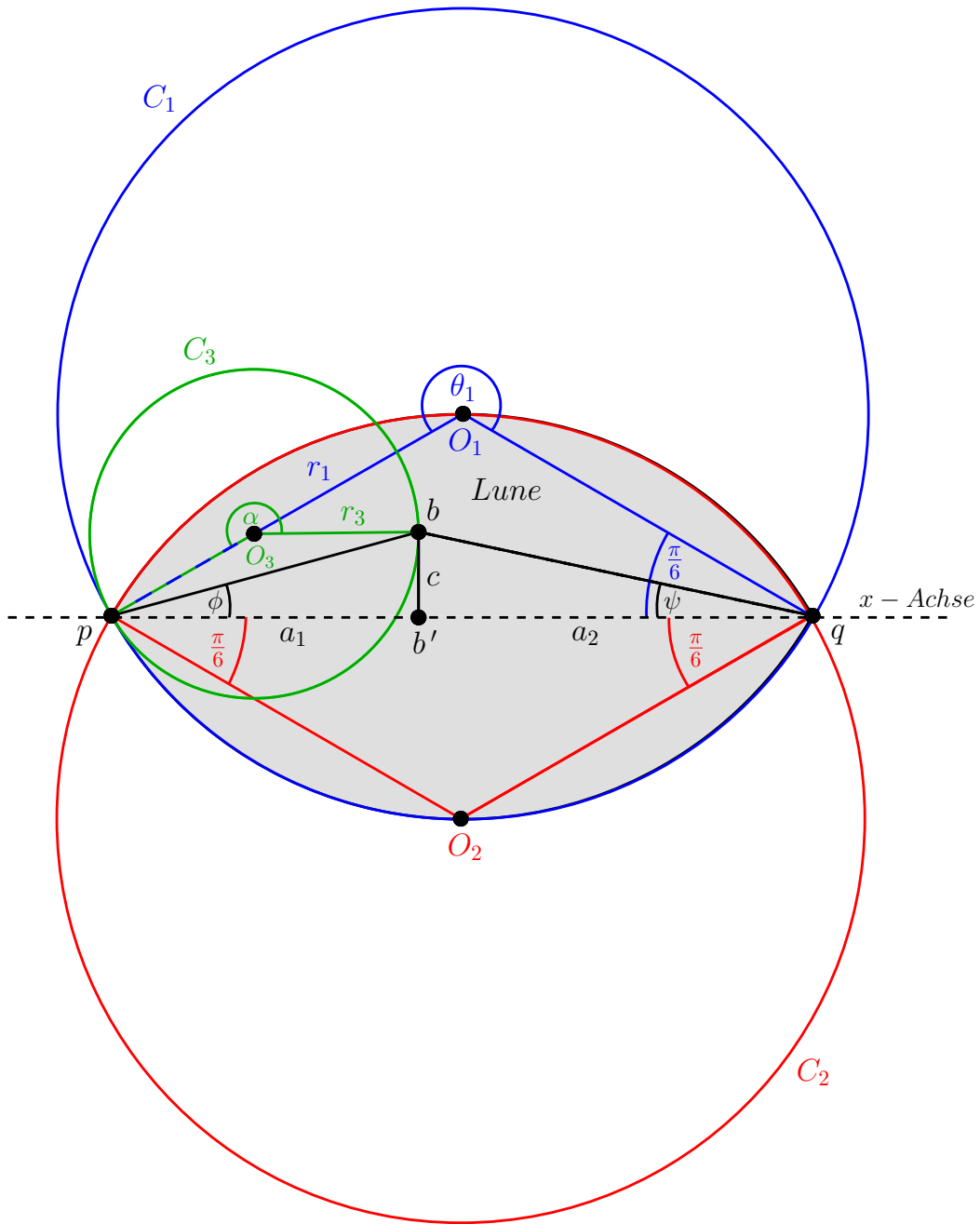


Abbildung 3.22: Zum Beweis von Theorem 3.7

Mit  $Lune(C_1, C_2)$  wird der Durchschnitt der beiden Kreise  $C_1$  und  $C_2$  bezeichnet. Er ist in Abbildung 3.22 grau unterlegt.

Wenn keine Punkte aus  $S$  im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$  existieren, dann gibt es auch keine Punkte im Innern von  $C_1$  unterhalb der  $x$ -Achse. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.6 erfüllt, und es gilt  $d_{DT}(p, q) \leq r_1 \theta_1$ , wobei  $r_1$  der Radius von  $C_1$  ist und  $\theta_1$  der obere Winkel  $pO_1q$ , der im Übrigen die gleiche Größe hat wie der untere Winkel  $pO_2q$ . Der Wert von  $\theta_1$  lässt sich präzisieren zu

$$\theta_1 = 2\pi - \left( \pi - 2 \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{4}{3}\pi$$

und nach Anwendung des Kosinussatzes wie in Fakt 3 erhält man

$$r_1 = \frac{d(p, q)}{2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\leq r_1 \theta_1 = \frac{d(p, q)}{2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)} \cdot \frac{4}{3}\pi \\ &= \frac{2\pi}{3 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)} d(p, q), \end{aligned}$$

womit dieser Fall erfolgreich abgeschlossen ist, da sich durch eine weitere Umformung die Ungleichung aus Theorem 3.7 ergibt, nämlich

$$\frac{d_{DT}(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{2\pi}{3 \cos \left( \frac{\pi}{6} \right)}.$$

Der Fall, in dem keine Punkte aus  $S$  im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$  existieren, konnte mit Hilfe von Lemma 3.6 schnell geklärt werden. Es verbleibt der kompliziertere Fall, in dem sich ein Punkt aus  $S$  im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$  befindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist es dabei ausreichend, nur die Punkte aus der Menge  $S' \subseteq S$  zu betrachten, die im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$  näher zu  $p$  als zu  $q$  liegen. Zudem kann die Untersuchung auf eine Halbebene entweder ober- oder unterhalb der  $x$ -Achse beschränkt werden, da sich die Szene beliebig drehen lässt. Im weiteren Verlauf des Beweises werden daher nur die Punkte aus  $S'$  betrachtet, die oberhalb oder auf der  $x$ -Achse liegen. Sei  $\mathcal{K}$  die Menge aller Kreise, die durch  $p$  verlaufen und ihre Mittelpunkte auf dem Liniensegment  $pO_1$  haben, und sei  $b \in S'$  ein Punkt, dessen Lage zusammenfassend wie folgt eingeschränkt werden kann. Der Punkt  $b$  liegt

- im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$ ,
- näher zu  $p$  als zu  $q$ ,
- nicht unterhalb der  $x$ -Achse und
- auf dem Rand eines Kreises  $C_3 \in \mathcal{K}$ , dessen Inneres geschnitten mit  $Lune(C_1, C_2)$  keine Punkte aus  $S$  enthält.

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.22 dargestellt.

Desweiteren wird mit  $\phi$  der Winkel  $qpb$  und mit  $\psi$  der Winkel  $pqb$  bezeichnet. Der Punkt  $b'$  ist die Projektion des Punktes  $b$  auf die  $x$ -Achse, und  $c$  ist der Abstand zwischen beiden Punkten. Sei weiter  $\alpha$  der obere Winkel  $pO_3b$  und  $r_3$  der Radius des Kreises  $C_3$ .

Der Beweis wird nun durch Induktion über den euklidischen Abstand  $d(p, q)$  aller Punktepaare  $(p, q)$  mit  $p, q \in S$  fortgeführt. Den Induktionsanfang bilden dabei die zwei zueinander dichtesten Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$ , für die  $d_{DT}(p, q) = d(p, q)$  gilt, da das Liniensegment  $pq$  eine Kante der Delaunay-Triangulation von  $S$  sein muss. Dass die beiden dichtesten Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$  durch eine Delaunay-Kante verbunden sind, kann mit dem Voronoi-Diagramm von  $S$  erklärt werden, denn der Bisektor bzw. die Voronoi-Kante von  $p$  und  $q$  ist von beiden Punkten sichtbar, und deshalb ist  $pq \in DT(S)$ .

Im Induktionsschritt muss nun gezeigt werden, dass Theorem 3.7 für das  $i$ -te dichteste Punktepaar  $(p, q)$  gilt. Als Induktionsvoraussetzung kann man annehmen, dass Theorem 3.7 auch für alle dichteren Punktepaare gilt. Es folgt

$$d_{DT}(p, q) \leq d_{DT}(p, b) + d_{DT}(b, q),$$

und da  $C_3$  unterhalb des Liniensegmentes  $pb$  keine Punkte aus  $S$  enthält, impliziert Lemma 3.6  $d_{DT}(p, b) \leq \alpha r_3$ . Wegen der Induktionsvoraussetzung ist

$$d_{DT}(b, q) \leq \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} d(b, q)$$

und somit

$$d_{DT}(p, q) \leq \alpha r_3 + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} d(b, q). \quad (3.3)$$

Zwei Fälle müssen nun unterschieden werden und sind getrennt zu untersuchen, nämlich ob der Punkt  $b$  auf oder oberhalb der  $x$ -Achse liegt.

Fall 1:  $b$  liegt auf der  $x$ -Achse

Wenn sich  $b$  auf der  $x$ -Achse befindet, ansonsten aber den oben angegebenen Einschränkungen unterliegt, dann ist die Größe des Winkels  $\alpha$  immer konstant und stimmt mit der von  $\theta_1$  überein. Also

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi.$$

Der Radius  $r_3$  lässt sich auf analoge Weise bestimmen wie der Radius  $r_1$ . Man erhält

$$r_3 = \frac{d(p, b)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Eingesetzt in (3.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} d_{DT}(p, q) &\stackrel{(3.3)}{\leq} \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} d(p, b) + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} d(b, q) \\ &= \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} [d(p, b) + d(b, q)] \\ &= \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} d(p, q), \end{aligned}$$

womit dieser Fall erfolgreich abgeschlossen wäre.



Fall 2:  $b$  liegt oberhalb der  $x$ -Achse

Wenn sich  $b$  oberhalb der  $x$ -Achse befindet, dann ist die Größe der Winkel  $\alpha$ ,  $\phi$  und  $\psi$  variabel, wodurch sich dieser Fall schwieriger gestaltet. Der Wert von  $\alpha$  beträgt

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\pi - \left(\pi - 2\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right)\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi - 2\phi,\end{aligned}$$

und da das Dreieck  $pb'b$  rechtwinklig ist, erhält man  $d(p, b) = c / \sin \phi$ . Unter Anwendung des allgemeinen Sinussatzes

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \implies \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

auf das Dreieck  $pbO_3$  ergibt sich damit die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{r_3}{c / \sin \phi} &= \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - \phi)}{\sin(2\pi - \alpha)} \\ &= \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - \phi)}{\sin(\frac{2}{3}\pi + 2\phi)},\end{aligned}$$

die nun nach  $r_3$  aufgelöst werden kann, also

$$\begin{aligned}r_3 &= \frac{\sin(\frac{\pi}{6} - \phi)}{\sin(\frac{2}{3}\pi + 2\phi)} \cdot \frac{c}{\sin \phi} \\ &= \frac{c \sin(\frac{\pi}{6} - \phi)}{\sin(\frac{2}{3}\pi + 2\phi) \sin \phi} \\ &= \frac{c \cos(\frac{\pi}{3} + \phi)}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \phi) \cos(\frac{\pi}{3} + \phi) \sin \phi} \\ &= \frac{c}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \phi) \sin \phi}.\end{aligned}$$

Da auch das Dreieck  $bb'q$  rechtwinklig ist, ergibt sich  $d(b, q) = c / \sin \psi$ , was nun zusammen mit den für  $\alpha$  und  $r_3$  erhaltenen Formeln wieder in Gleichung (3.3) eingesetzt werden kann. Man erhält

$$\begin{aligned}d_{DT}(p, q) &\stackrel{(3.3)}{\leq} \alpha r_3 + \frac{2\pi}{3 \cos(\frac{\pi}{6})} d(b, q) \\ &= \left(\frac{4}{3}\pi - 2\phi\right) \frac{c}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \phi) \sin \phi} + \frac{2\pi}{3 \cos(\frac{\pi}{6})} \cdot \frac{c}{\sin \psi} \\ &= \left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{c}{\sin(\frac{\pi}{3} + \phi) \sin \phi} + \frac{2\pi c}{3 \cos(\frac{\pi}{6}) \sin \psi}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Sei  $a_1$  der Abstand von  $p$  zu  $b'$ , und sei  $a_2$  der Abstand von  $b'$  zu  $q$ . Dann ist

$$d(p, q) = a_1 + a_2 = \frac{c}{\tan \phi} + \frac{c}{\tan \psi}$$

und zusammen mit (3.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d_{DT}(p, q)}{d(p, q)} &\leq \frac{\left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{c}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin \phi} + \frac{2\pi c}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \psi}}{\frac{c}{\tan \phi} + \frac{c}{\tan \psi}} \\ &= \frac{\frac{\frac{2}{3}\pi - \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin \phi} + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \psi}}{\frac{1}{\tan \phi} + \frac{1}{\tan \psi}} \\ &= \frac{\frac{\frac{2}{3}\pi - \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin \phi} + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \psi}}{\frac{\cos \phi}{\sin \phi} + \frac{\cos \psi}{\sin \psi}} \\ &= \left[ \frac{\frac{2}{3}\pi - \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin \phi} + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \psi} \right] \frac{\sin \phi \sin \psi}{\cos \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \phi} \\ &= \left[ \frac{\frac{2}{3}\pi - \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin \phi} + \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin \psi} \right] \frac{\sin \phi \sin \psi}{\sin(\psi + \phi)} \\ &= \left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{\sin \psi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin(\psi + \phi)} + \frac{2\pi \sin \phi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(\psi + \phi)} \\ &= f(\phi, \psi). \end{aligned}$$

Durch die Lage des Punktes  $b$  kann der Definitionsbereich der Funktion  $f(\phi, \psi)$  erheblich eingeschränkt werden. Weil  $b$  im Innern von  $Lune(C_1, C_2)$  liegt und sich oberhalb der  $x$ -Achse sowie näher an  $p$  als an  $q$  befindet, folgt

$$\psi > 0, \quad \phi \geq \psi \quad \text{und} \quad \phi + \psi < \frac{\pi}{3}.$$

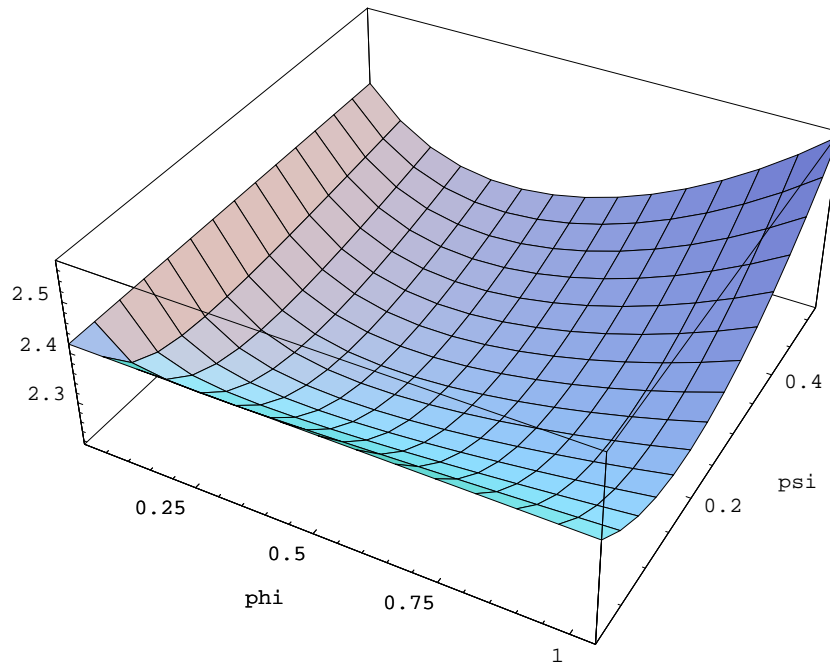
Aus diesen Bedingungen ergibt sich für  $f(\phi, \psi)$  der relevante Definitionsbereich

$$0 < \phi < \pi/3$$

und

$$0 < \psi < \pi/6.$$

In Abbildung 3.23 wird ein 3D-Plot der Funktion  $f(\phi, \psi)$  gezeigt.

Abbildung 3.23: 3D-Plot von  $f(\phi, \psi)$  für  $0 < \phi < \pi/3$  und  $0 < \psi < \pi/6$ 

Es kann nun rechnerisch nachgewiesen werden, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} \neq 0 \quad \text{für} \quad \phi \geq \frac{\pi}{10}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} \neq 0 \quad \text{für} \quad \phi \leq \frac{\pi}{10}$$

gilt. Eine Extremstelle kann aber nur vorliegen, wenn beide partiellen Ableitungen den Wert 0 haben. Infolgedessen muss zur Ermittlung des Maximums, die Funktion  $f(\phi, \psi)$  nur an den Grenzen des Definitionsbereiches untersucht werden. Somit sind also drei Situationen zu prüfen.

1. Strebt  $\psi$  gegen 0, dann strebt auch  $\sin \psi$  gegen 0, und  $\sin(\psi + \phi)$  strebt gegen  $\sin \phi$ .  
Dadurch ergibt sich

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} f(\phi, \psi) = \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

2. Wenn  $\psi$  gegen  $\phi$  strebt, dann wird  $f(\phi, \psi)$  zur Funktion

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{\sin \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin(2\phi)} + \frac{2\pi \sin \phi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(2\phi)} \\ &= \left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{\sin \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) 2 \sin \phi \cos \phi} + \frac{2\pi \sin \phi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) 2 \sin \phi \cos \phi} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\pi - \phi}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) 2 \cos \phi} + \frac{\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos \phi}, \end{aligned}$$

mit  $0 < \phi < \pi/6$ . In der folgenden Abbildung ist die Funktion  $g(\phi)$  für den relevanten Definitionsbereich dargestellt.

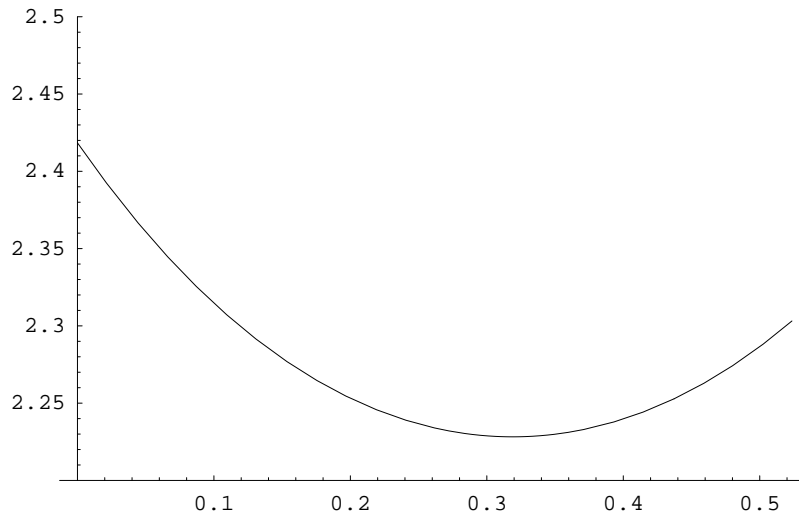


Abbildung 3.24: Die Funktion  $g(\phi)$  für  $0 < \phi < \pi/6$

Man kann zeigen, dass  $g(\phi)$  für  $0 < \phi < \pi/6$  zwar ein lokales Minimum aber kein lokales Maximum besitzt, was auch aus Abbildung 3.24 hervorgeht. Daher muss das Maximum von  $g(\phi)$  erreicht werden, wenn  $\phi$  entweder gegen 0 oder  $\pi/6$  strebt. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow 0} g(\phi) &= \frac{\pi}{3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\pi}{3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)} + \frac{\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{\pi}{3 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} + \frac{\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow \pi/6} g(\phi) &= \frac{\pi}{4 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{\pi}{3 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &\approx 2.30 \\ &< \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &\approx 2.42. \end{aligned}$$

Damit wird der Grenzwert von beiden Werten nicht überschritten.

3. Wenn  $\phi + \psi$  gegen  $\pi/3$  strebt, dann wird  $f(\phi, \psi)$  zur Funktion

$$h(\phi) = \left(\frac{2}{3}\pi - \phi\right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \phi\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{2\pi \sin \phi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)},$$

mit  $\pi/6 < \phi < \pi/3$ . Die folgende Abbildung zeigt den Funktionsgraphen von  $h(\phi)$  für den relevanten Definitionsbereich.

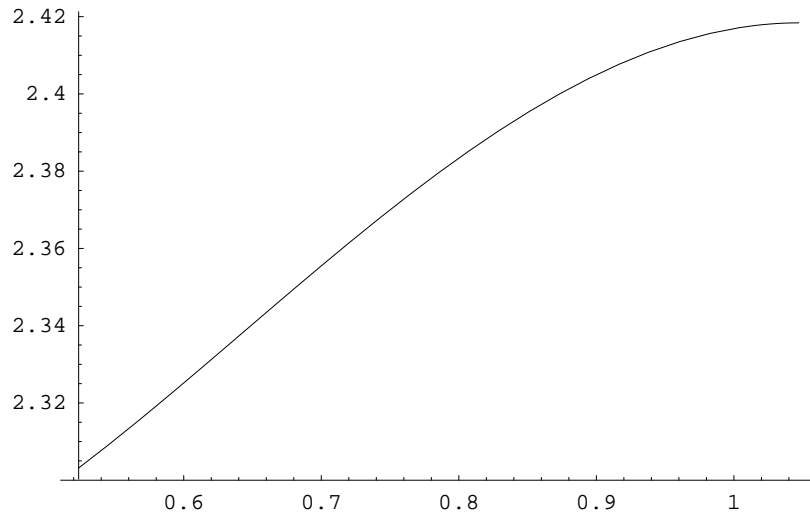


Abbildung 3.25: Die Funktion  $h(\phi)$  für  $\pi/6 < \phi < \pi/3$

Man kann zeigen, dass  $dh/d\phi \neq 0$  für  $\pi/6 < \phi < \pi/3$ , was auch wieder durch die Darstellung des Funktionsgraphen ersichtlich ist. Daher muss das Maximum von  $h(\phi)$  erreicht werden, wenn  $\phi$  entweder gegen  $\pi/6$  oder gegen  $\pi/3$  strebt. Also

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow \pi/6} h(\phi) &\approx 2.30 \\ &< \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &\approx 2.42 \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi/3} h(\phi) = \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Somit folgt schließlich für  $0 < \psi \leq \phi < \pi/3 - \psi$

$$\frac{d_{DT}(p, q)}{d(p, q)} \leq f(\phi, \psi) \leq \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)},$$

womit der Beweis endgültig vollbracht ist. ■

Soweit zum euklidischen Abstandsbegriff. In den beiden nächsten Abschnitten werden zwei weitere Metriken die Diskussion ergänzen. Abschließend kann festgehalten werden, dass sich in der euklidischen Metrik die kleinste obere Schranke für den Wert der Dilation einer Delaunay-Triangulation in dem Intervall

$$\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 2.42 \right]$$

befindet, wobei in [Che89] vermutet wird, dass sie nahe bei  $\pi/2$  liegt.

## 3.2 Manhattan-Metrik

In diesem Abschnitt wird die kleinste bekannte obere Schranke für die Dilation von Delaunay-Triangulationen präsentiert, bei der zur Berechnung der Dilation die euklidische Metrik verwendet wird und zur Konstruktion der Delaunay-Triangulationen die Manhattan-Metrik. Gerade der Stadtplan von Manhattan offenbart, dass die euklidische Metrik oft nicht geeignet ist, um reale überwindbare Distanzen anzugeben. Manhattan-Metrik ist die umgangssprachliche Bezeichnung für die  $L_1$ -Metrik, in der die Entfernung zwischen zwei Punkten definiert ist als

$$L_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|.$$

Ein  $L_1$ -Kreis hat somit die Form eines Quadrates rotiert um  $45^\circ$ .

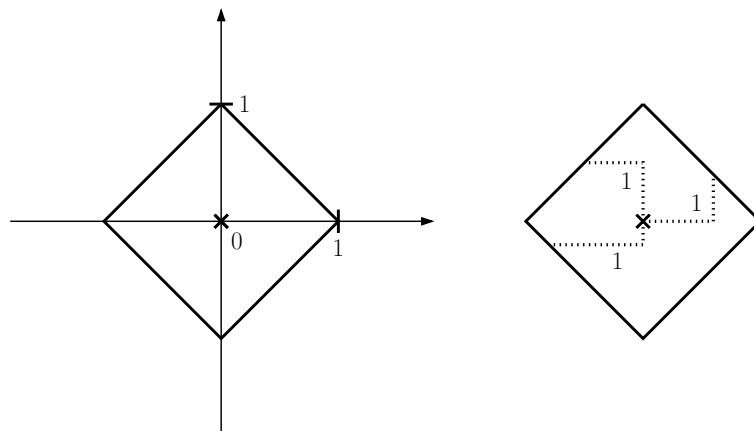


Abbildung 3.26: Der Einheitskreis in der  $L_1$ -Metrik

Die Eigenschaft, dass ein Kreis aus genau den Punkten besteht, die vom Kreismittelpunkt gleich weit entfernt sind, bleibt damit erhalten.

### 3.2.1 Eigenschaften von $DT(S)$ in der $L_1$ -Metrik

Sei  $S$  eine Menge von  $n$  Punkten in der Ebene. Je nach Kontext werden die Elemente von  $S$  als Punkte oder als Knoten bezeichnet.

Auch in der  $L_1$ -Metrik lässt sich die Delaunay-Triangulation in linearer Zeit aus dem entsprechenden Voronoi-Diagramm ableiten, für welches Zeit  $O(n \log n)$  veranschlagt werden muss [Che86]. Alternativ kann es in derselben Zeitschranke auch direkt berechnet werden. In [Dry90] wird gezeigt, wie die Delaunay-Triangulation generell für konvexe Distanzfunktionen, bei denen der Einheitskreis eine beliebige konvexe Form annehmen kann, in worst-case Zeit  $O(n \log n)$  direkt berechnet werden kann.

In der euklidischen Metrik definieren drei Punkte aus  $S$  genau dann ein Dreieck von  $DT(S)$ , wenn der eindeutig bestimmte Kreis durch diese drei Punkte keinen Punkt aus  $S$  im Innern enthält. Das gilt gewissermaßen auch in der  $L_1$ -Metrik, allerdings besteht hier diesbezüglich eine Problematik. Zum einen gibt es nicht für jedes Dreieck einen  $L_1$ -Kreis, der alle Eckpunkte auf dem Rand enthält, und zum anderen ist ein solcher  $L_1$ -Kreis unter Umständen nicht eindeutig.

In der folgenden Abbildung finden sich dazu zwei Beispiele.

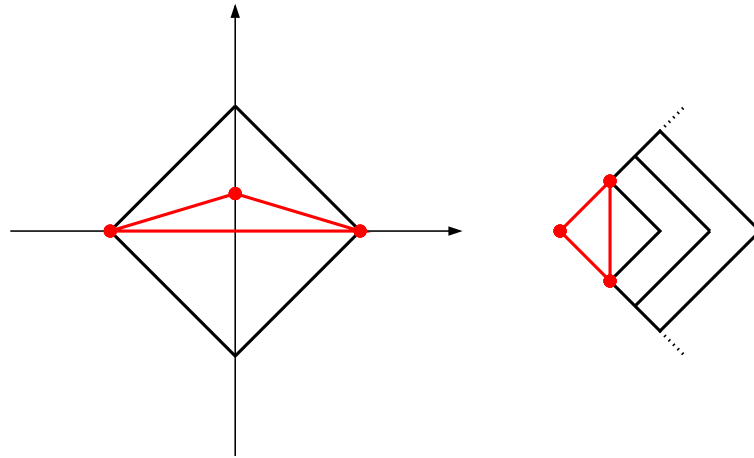


Abbildung 3.27: links: kein umschließender  $L_1$ -Kreis mit allen Punkten auf dem Rand  
rechts: beliebig viele

Unter Berücksichtigung dieser Problematik wird die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation daher neu definiert, wobei die Eigenschaft der Dualität zum  $L_1$ -Voronoi-Diagramm erhalten bleibt.

**Definition 3.8** Die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation einer Punktmenge  $S$  ist eine Triangulation von  $S$ , in der es für jedes Dreieck einen leeren  $L_1$ -Kreis gibt, der alle drei Punkte aus  $S$  auf dem Rand enthält.

Da die Bisektoren in der  $L_1$ -Metrik im Allgemeinen keine Geraden sind, gilt für die Voronoi-Regionen, dass sie im Allgemeinen nicht konvex sind, und dass nicht jede Kante der konvexen Hülle von  $S$  eine Delaunay-Kante sein muss.

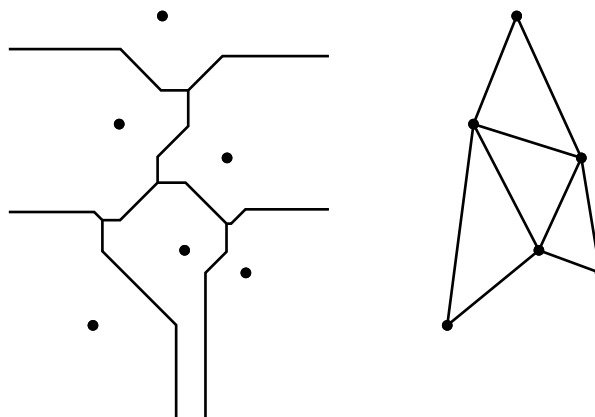


Abbildung 3.28:  $L_1$ -Voronoi-Diagramm (links) und  $L_1$ -Delaunay-Triangulation (rechts)



### 3.2.2 Obere Schranke für die Dilation

Kommen wir nun zum Beweis der kleinsten bekannten oberen Schranke für die Dilation einer  $L_1$ -Delaunay-Triangulation. In dem Artikel „There is a planar graph almost as good as the complete graph“ von L. Paul Chew [Che86] wird gezeigt, dass

$$\delta_{L_1-DT}(S) \leq \sqrt{10}$$

gilt. Somit ist ein kürzester Pfad zwischen zwei Knotenpunkten in einer  $L_1$ -Delaunay-Triangulation höchstens  $\sqrt{10}$ -mal so lang wie der euklidische Luftlinienabstand. Der Beweis wird darauf hinauslaufen zu zeigen, dass für zwei beliebige Punkte aus  $S$  immer ein Pfad gefunden werden kann, der dieser Bedingung genügt.

Zur Vereinfachung und Vermeidung einiger Spezialfälle in den Beweisen werden als Erstes die vier Punkte

$$(+\infty, 0), (-\infty, 0), (0, +\infty) \text{ und } (0, -\infty)$$

zur Punktmenge  $S$  hinzugefügt. Sie entsprechen den Eckpunkten einer unendlich großen Version des  $L_1$ -Kreises und bewirken, dass die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation von  $S$  die komplette Ebene umspannt. Praktische Anwendungen, beruhend auf dem Ergebnis dieses Abschnitts, bleiben von dieser Maßnahme natürlich unberührt.

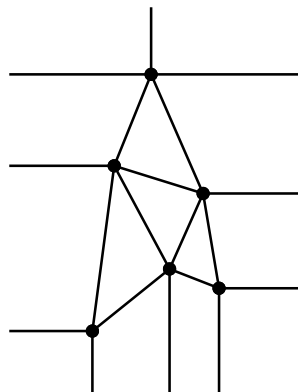


Abbildung 3.29:  $L_1-DT(S)$  umspannt die komplette Ebene

Es folgt nun zunächst die Definition eines *Circle-Graphen*, der einen wichtigen Bestandteil im Aufbau des Beweises darstellt.

**Definition 3.9** Sei  $L_1-DT(S)$  die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation einer Punktmenge  $S$  in der Ebene. Die Knoten des von  $L_1-DT(S)$  abgeleiteten *Circle-Graphen* sind genau die Punkte aus  $S$ . Zu jedem Dreieck  $\Delta$  in  $L_1-DT(S)$  existieren im *Circle-Graphen* drei Kanten, die den drei Bogenabschnitten des leeren  $L_1$ -Kreises um  $\Delta$  entsprechen. Dabei ist die Länge einer Kante des *Circle-Graphen* durch die entsprechende Bogenlänge des leeren  $L_1$ -Kreises definiert. Gibt es mehrere leere  $L_1$ -Kreise um  $\Delta$ , dann wird der kleinste Kreis verwendet. Gibt es mehrere kleinste Kreise, dann der am weitesten links liegende.

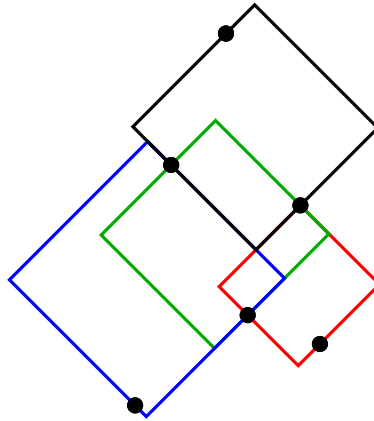


Abbildung 3.30: Circle-Graph in der  $L_1$ -Metrik

Das Aussehen des Circle-Graphen richtet sich selbstverständlich nach der jeweils eingesetzten Distanzfunktion. In der euklidischen Metrik besteht der Circle-Graph genau aus den eindeutig bestimmten Kreisen um die Dreiecke von  $DT(S)$ . In der  $L_1$ -Metrik besteht er entsprechend aus um  $45^\circ$  gekippten Quadraten. Unabhängig von der eingesetzten Distanzfunktion ist aber die Eigenschaft, dass für jede innere Kante  $e$  einer Delaunay-Triangulation zwei Kanten im Circle-Graphen existieren, nämlich jeweils eine für beide Dreiecke die  $e$  enthalten.

Der Beweis verläuft in drei Phasen, die zunächst kurz skizziert werden. Zuerst nehmen wir wieder an, dass die Punkte  $p, q \in S$  horizontal auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen und dass die  $x$ -Koordinate von  $p$  kleiner als die von  $q$  ist. Mit  $L$  wird dabei das Teilstück der  $x$ -Achse von  $p$  nach  $q$  bezeichnet. Unter dieser Annahme gibt es im Circle-Graphen einen Pfad von  $p$  nach  $q$ , dessen Länge

$$\leq 2\sqrt{2} d(p, q)$$

ist. Als nächstes wird die Einschränkung, dass das Liniensegment  $L = pq$  horizontal sein muss, aufgehoben und gezeigt, dass es für zwei beliebige Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$  einen Pfad im Circle-Graphen gibt mit Länge

$$\leq \sqrt{10} d(p, q).$$

Mit diesem Resultat ist es schließlich ein Leichtes zu zeigen, dass ein Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten einer  $L_1$ -Delaunay-Triangulation existiert, der höchstens so lang ist wie der Pfad von  $p$  nach  $q$  im Circle-Graph.

**Lemma 3.10** *Sei  $L_1$ -DT( $S$ ) die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene, und sei CG der von  $L_1$ -DT( $S$ ) abgeleitete Circle-Graph. Wenn  $p \in S$  den Anfangspunkt und  $q \in S$  den Endpunkt eines horizontalen Liniensegmentes  $L = pq$  markieren, dann gibt es einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von CG, der nicht länger ist als*

$$2\sqrt{2} d(p, q).$$

**Beweis.** Der folgende Algorithmus berechnet einen geeigneten Pfad und liefert somit den Beweis seiner Existenz.

ALGORITHMUS 1

1. Sei  $L = pq$  das horizontale Liniensegment von  $p$  nach  $q$ , mit  $p$  auf der linken Seite. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass außer  $p$  und  $q$  keine weiteren Punkte aus  $S$  auf  $L$  liegen, denn wenn zwischen  $p$  und  $q$  ein Punkt, z.B.  $b$ , liegen würde, dann könnte rekursiv der Pfad von  $p$  nach  $b$  sowie von  $b$  nach  $q$  berechnet werden. Das Zusammenfügen beider Pfade würde dann wieder einen Pfad von  $p$  nach  $q$  liefern. Sei  $L_1-DT(S)'$  der Teilgraph von  $L_1-DT(S)$ , der nur aus denjenigen  $L_1$ -Delaunay-Dreiecken besteht, die ein Teilstück von  $L$  in ihrem Innern enthalten. Zu beachten ist, dass die Dreiecke des Teilgraphen  $L_1-DT(S)'$  von links nach rechts entlang  $L$  geordnet sind. Der Pfad wird nun sukzessiv beim Durchlaufen von einem Knoten zum nächsten konstruiert, wobei der Algorithmus lediglich mit den Knoten und Kanten von  $L_1-DT(S)'$  und den entsprechenden  $L_1$ -Kreisen aus dem Circle-Graphen arbeitet. Mit  $P_i$  wird die aktuelle Position auf dem Pfad angezeigt. Bei dieser Position kann es sich immer nur um einen Knoten von  $L_1-DT(S)'$  handeln. Zu Beginn ist  $i = 0$  und  $P_0$  gerade der Punkt  $p$ .
2. Sei  $\Delta_i$  das am weitesten rechts liegende Dreieck von  $L_1-DT(S)'$ , welches  $P_i$  als Knoten enthält (Abbildung 3.32), und sei  $C_i$  der  $L_1$ -Kreis im Circle-Graph um  $\Delta_i$ . Dann muss sich einer der beiden verbleibenden Knoten von  $\Delta_i$ , genannt  $P_{oben}$ , oberhalb  $L$  und im Uhrzeigersinn entlang des Randes  $C_i$  von  $P_i$  aus befinden. Der andere, genannt  $P_{unten}$ , liegt dementsprechend unterhalb  $L$  und ist entgegen dem Uhrzeigersinn entlang des Randes  $C_i$  von  $P_i$  aus zu erreichen. Es ist natürlich auch möglich, dass einer der beiden Knoten gerade  $q$  ist und damit auf  $L$  liegt. Daher soll der Punkt  $q$  als oberhalb sowie als unterhalb von  $L$  angesehen werden.
3. IF ( $P_i$  ist auf der oberen linken Kante von  $C_i$ )  
     THEN gehe im Uhrzeigersinn um  $C_i$   
   ELSE IF ( $P_i$  ist auf der unteren linken Kante von  $C_i$ )  
     THEN gehe entgegen dem Uhrzeigersinn um  $C_i$   
   ELSE IF ( $P_i$  ist oberhalb  $L$ )  
     THEN gehe im Uhrzeigersinn um  $C_i$   
   ELSE IF ( $P_i$  ist unterhalb  $L$ )  
     THEN gehe entgegen dem Uhrzeigersinn um  $C_i$

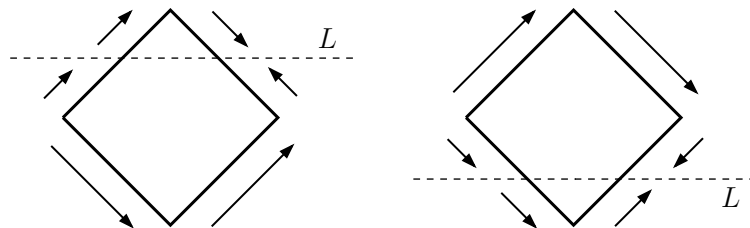


Abbildung 3.31: Bewegungsrichtungen in Schritt 3

4. Fahre in dieser Weise fort, so dass in jedem Schritt entweder  $P_{oben}$  oder  $P_{unten}$  erreicht wird, und benenne den Knoten in  $P_{i+1}$  um. Wenn  $P_{i+1}$  identisch ist mit dem Endpunkt  $q$ , dann sind wir fertig. Andernfalls wird  $i$  inkrementiert, und es geht wieder zu Schritt 2.

In Schritt 2 ist  $\Delta_i$  das am weitesten rechts liegende Dreieck von  $L_1\text{-DT}(S)'$ , welches  $P_i$  als Knoten enthält. Damit ist von allen in Frage kommenden  $L_1$ -Delaunay-Dreiecken immer genau jenes gemeint, welches von  $L$  am weitesten rechts geschnitten wird.

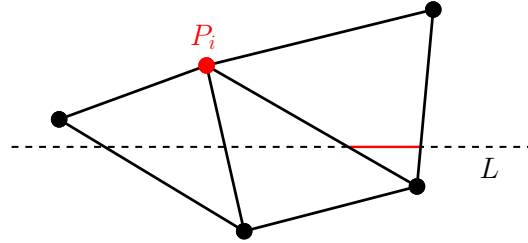


Abbildung 3.32: Das am weitesten rechts liegende Dreieck, welches  $P_i$  enthält

Es folgen nun eine Reihe von Lemmata, die Bezug nehmen auf wichtige Eigenschaften des von Algorithmus 1 konstruierten Pfades, der entlang den Kanten des Circle-Graphen verläuft. Daran anschließend wird mit dem Beweis von Lemma 3.10 fortgefahren.

**Lemma 3.11** *Alle  $\Delta_i \in L_1\text{-DT}(S)'$  aus Schritt 2 von Algorithmus 1 sind von links nach rechts entlang  $L$  geordnet.*

**Beweis.** Die Aussage folgt direkt aus der sukzessiven Benutzung aller  $\Delta_i$ , also der jeweils am weitesten rechts liegenden Dreiecke, die  $P_i$  enthalten. ■

**Lemma 3.12** *Algorithmus 1 terminiert und liefert einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des Circle-Graphen.*

**Beweis.** In Schritt 2 befinden sich  $P_{oben}$  und  $P_{unten}$  rechts von  $P_i$ , und in Schritt 4 wird entweder  $P_{oben}$  oder  $P_{unten}$  zu  $P_{i+1}$ . Wird die Sequenz  $\{P_i\}$  der aufeinanderfolgenden Knoten anstelle mit Kanten des Circle-Graphen mit Kanten des Teilgraphen  $L_1\text{-DT}(S)'$  verbunden, so entsteht ein Pfad in  $L_1\text{-DT}(S)'$ . Da der Teilgraph  $L_1\text{-DT}(S)'$  nur aus einer endlichen Anzahl von  $L_1$ -Delaunay-Dreiecken besteht, ist somit auch die Anzahl der daraus benötigten  $\Delta_i$  begrenzt. Nach Lemma 3.11 werden diese  $\Delta_i$  der Reihe nach von links nach rechts abgearbeitet bis der Endpunkt  $q$  erreicht wird. ■

**Lemma 3.13** *Seien  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  Dreiecke aus  $L_1\text{-DT}(S)'$  und seien  $C_1$  und  $C_2$  die entsprechenden  $L_1$ -Kreise im Circle-Graphen um diese Dreiecke. Mit  $e_1$  und  $e_2$  werden die jeweils am weitesten rechts liegenden Schnittpunkte von  $C_1$  und  $C_2$  mit  $L$  bezeichnet. Zudem sei mit  $\leq$  eine Ordnung der Dreiecke von links nach rechts entlang  $L$  sowie der Punkte selbst von  $L$  definiert. Dann gilt*

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \iff e_1 \leq e_2.$$

**Beweis.** Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass die  $L_1$ -Kreise des Circle-Graphen keine Punkte aus  $S$  in ihrem Innern enthalten und dadurch auch kein  $L_1$ -Kreis ganz in einem anderen enthalten sein kann. ■

**Lemma 3.14** *Sei  $b$  ein Punkt, der auf dem Circle-Graphen von  $p$  nach  $q$  entlang des von Algorithmus 1 ausgegebenen Pfades wandert. Dann gilt*

1. für  $b$  oberhalb von  $L$ :

- Punkt  $b$  bewegt sich nicht in Richtung links oben.
- Wandert  $b$  entlang der oberen linken Kante des aktuellen  $L_1$ -Kreises  $C_i$ , dann bewegt sich  $b$  in Richtung rechts oben.

2. für  $b$  unterhalb von  $L$ :

- Punkt  $b$  bewegt sich nicht in Richtung links unten.
- Wandert  $b$  entlang der unteren linken Kante des aktuellen  $L_1$ -Kreises  $C_i$ , dann bewegt sich  $b$  in Richtung rechts unten.

**Beweis.** Die Aussagen folgen direkt aus den Verzweigungsmöglichkeiten des dritten Schrittes von Algorithmus 1. ■

Mit diesen Lemmata ist das notwendige Rüstzeug gegeben, um den Beweis von Lemma 3.10 fortzuführen.

**Beweis von Lemma 3.10.** Um die Länge des von Algorithmus 1 ausgegebenen Pfades zu analysieren, wird der Pfad zunächst in einzelne Stücke zerlegt, die dann geeignet umgeformt werden, so dass die Länge der Pfadstücke mathematisch abgeschätzt werden kann. Es wird sich herausstellen, dass das Verhältnis aus der Länge jedes dieser Pfadstücke zu der Länge des entsprechenden Teilstückes von  $L$  durch  $2\sqrt{2}$  nach oben beschränkt ist.

Natürlich sind die Stellen, an denen der Pfad zerstückelt wird, nicht einfach beliebig wählbar, sondern unterliegen bestimmten Gesetzmäßigkeiten. Die einzelnen Pfadstücke sind das Resultat einer natürlichen und einer künstlichen Zerstückelung. Die natürliche Zerstückelung des Pfades erfolgt an den Stellen, an denen der Pfad das Liniensegment  $L = pq$  kreuzt. Bei der künstlichen Zerstückelung wird der Pfad zunächst an bestimmten Stellen erweitert. Genauer, der Pfad wird genau dann erweitert, wenn er nach links dreht und sich anschließend wieder von  $L$  weg bewegt. Die Erweiterungen führen zu einer häufigeren Berührung des Pfades mit  $L$ , als durch den ursprünglichen Pfadverlauf vorgegeben. Wann immer nun der erweiterte Pfad mit  $L$  in Berührung kommt, oder  $L$  kreuzt, wird der Pfad getrennt.

Sei z.B.  $b$  ein Punkt, der entlang des Pfades von  $p$  nach  $q$  wandert, und nehmen wir an,  $b$  befindet sich oberhalb von  $L$  und hat soeben nach links unten gedreht (Abbildung 3.33). Ob nun eine Erweiterung des Pfades zu Stande kommt, hängt vom weiteren Pfadverlauf ab. Erweitert wird der Pfad nur unter der Bedingung, dass sich  $b$  wieder von  $L$  weg bewegt, bevor  $b$  auf  $L$  trifft. Angenommen dieser Fall tritt ein. An der Stelle, wo sich  $b$  wieder von  $L$  weg bewegt, wird der Pfad erweitert, indem  $b$  solange in Richtung links unten bewegt wird, bis  $b$  auf  $L$  trifft. Um den Pfadverlauf nach  $q$  weiter fortzusetzen, wird  $b$  von  $L$  aus in Richtung rechts oben zurück bewegt, bis  $b$  wieder in den ursprünglichen Pfadverlauf einmünden kann.

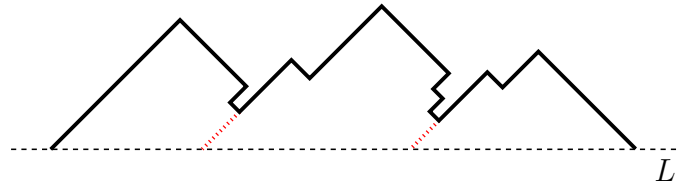


Abbildung 3.33: Erweiterte Pfadstellen oberhalb  $L$

Befindet sich  $b$  unterhalb von  $L$  (Abbildung 3.34), dann wird der Pfad in analoger Vorgehensweise erweitert. Angenommen  $b$  hat nach links oben gedreht. Erweitert wird der Pfad an der Stelle, an der sich  $b$  wieder von  $L$  weg bewegt. Die Form der Pfadstücke unterhalb von  $L$  entspricht somit quasi dem Spiegelbild der Pfadstücke oberhalb von  $L$ .

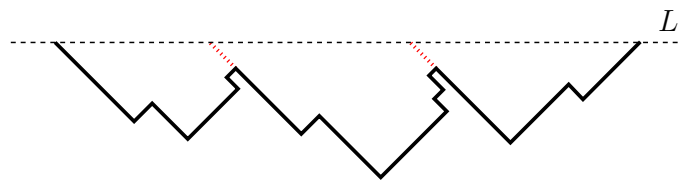


Abbildung 3.34: Erweiterte Pfadstellen unterhalb  $L$

Nach Lemma 3.14 gibt es für  $b$  nur zwei Möglichkeiten nach links zu drehen. Entweder nach links unten, für  $b$  oberhalb von  $L$ , oder nach links oben, für  $b$  unterhalb von  $L$ .

Aufgrund der Einschränkungen, die aus der Bewegungsrichtung von  $b$  (Lemma 3.14) und der Ordnung der  $L_1$ -Kreise entlang  $L$  (Lemma 3.13) folgen, kann jedes Pfadstück in eine Art Grundform gebracht werden, indem es so umgeformt wird, wie es folgende Abbildung veranschaulicht. Dabei bleibt die Pfadlänge unverändert.

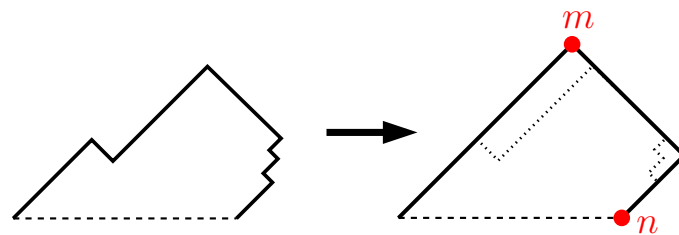


Abbildung 3.35: Pfadlänge bleibt nach Umformung konstant

Mit einer weiteren kleinen Änderung wird daraus nun ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei gleich langen Katheten  $a, b$  mit  $a = b$  und Hypotenuse  $c$ , wie Abbildung 3.36 zeigt.

In Dreiecken solcher Bauart gilt das Verhältnis

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{2},$$

was durch Anwendung des Satzes von Pythagoras gezeigt werden kann.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = c^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}a = c \Leftrightarrow 2a = \sqrt{2}c \Leftrightarrow \frac{2a}{c} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \sqrt{2}$$

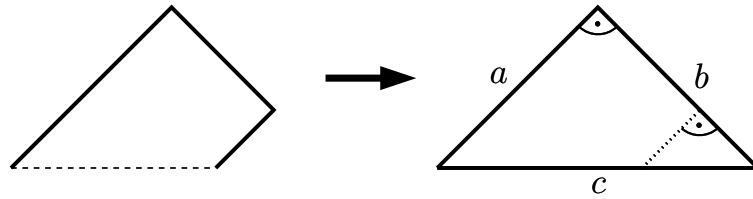


Abbildung 3.36: Rechtwinkliges Dreieck mit zwei gleich langen Katheten

Die Hypotenuse  $c$  ist nun zwar länger als das Teilstück von  $L$ , aber das braucht uns nicht weiter zu stören. Wichtig ist nämlich nur, dass der Punkt  $n$  in Abbildung 3.35 nicht links vom Punkt  $m$  liegt, was mit Lemma 3.13 gezeigt werden kann. Dadurch ist gewährleistet, dass die Länge des Teilstückes von  $L$  mindestens halb so lang ist wie die Hypotenuse  $c$  des rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung 3.36. Das Verhältnis, aus der Länge des Pfadstückes zu der Länge des entsprechenden Teilstückes von  $L$ , ist dadurch sicher durch  $2\sqrt{2}$  nach oben beschränkt. Da die Beschränkung für alle Pfadstücke gilt, - in analoger Weise auch für die Pfadstücke unterhalb von  $L$  - ist das Verhältnis aus der Länge des gesamten Pfades zur Länge von  $L$  ebenfalls durch  $2\sqrt{2}$  nach oben beschränkt. Somit ist der Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des Circle-Graphen, wie im Lemma angegeben, nicht länger als  $2\sqrt{2} d(p, q)$ . ■

Nun muss geklärt werden, welche Konsequenzen sich ergeben, wenn das Liniensegment  $pq$  nicht mehr wie in der Voraussetzung von Lemma 3.10 horizontal ist. Die dazu äquivalente Fragestellung lautet, was passiert, wenn das Liniensegment  $pq$  zwar weiterhin horizontal bleibt, aber die quadratischen Kreise im Circle-Graphen dafür um einen anderen Winkel als  $45^\circ$  rotiert sind?

In der euklidischen Metrik stellt sich diese Frage nicht, da erstens ein euklidischer Kreis keine Ausrichtung hat und zweitens die Größe des Umkreises eines euklidischen Delaunay-Dreiecks konstant bleibt, wenn es gedreht wird (Abbildung 3.37). In der  $L_1$ -Metrik hingegen bewirkt die Drehung eines  $L_1$ -Kreises im Allgemeinen eine Änderung der  $45^\circ$  Rotation, und wird ein  $L_1$ -Delaunay-Dreieck gedreht, dann hat der  $L_1$ -Umkreis nach der Drehung unter Umständen eine andere Größe als vorher, wodurch die Pfadlänge im Circle-Graphen betroffen ist.

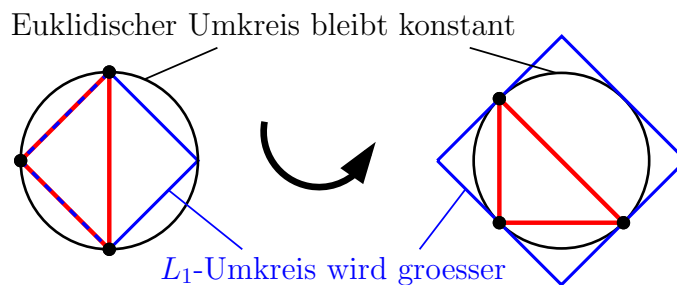


Abbildung 3.37: Drehung einer Szene

Die Beweisidee des folgenden Lemmas besteht darin, die Szene geeignet zu drehen, so dass das Liniensegment  $pq$  wieder horizontal ist, falls das vorher nicht der Fall gewesen sein sollte. Bei negativer Steigung des Liniensegmentes  $pq$  wird die Szene nach links gedreht und bei positiver Steigung nach rechts. Verläuft das Liniensegment  $pq$  senkrecht, dann kann es beliebig gedreht werden. Der Winkel, um den die quadratischen Kreise im Circle-Graphen nach der Drehung rotiert sind, wird mit  $\alpha$  bezeichnet. Der Rest des Beweises verläuft analog wie der zu Lemma 3.10, nur das  $\alpha$  mit in die Berechnungen integriert werden muss.

**Lemma 3.15** *Sei  $L_1$ -DT( $S$ ) die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation einer Punktmenge  $S$  in der Ebene, und sei CG der von  $L_1$ -DT( $S$ ) abgeleitete Circle-Graph. Dann gibt es für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von CG, der nicht länger ist als*

$$\sqrt{10} d(p, q).$$

**Beweis.** Verläuft  $L$  horizontal, dann muss die Szene nicht gedreht werden, und die Größe des Winkels  $\alpha$  beträgt unverändert  $45^\circ$ . Verläuft  $L$  senkrecht, dann wird die Szene um  $90^\circ$  nach links oder rechts gedreht, wodurch die  $L_1$ -Kreise wieder ihre ursprüngliche Ausrichtung erhalten. Somit ergibt sich erneut  $\alpha = 45^\circ$ . Hat  $L$  eine negative Steigung von  $45^\circ$ , dann wird die Szene um  $45^\circ$  nach links gedreht, woraus  $\alpha = 0^\circ$  folgt. Im dritten Schritt von Algorithmus 1 wird aus der 'oberen linken Kante von  $C_i$ ' nun die 'linke Kante von  $C_i$ ', und aus der 'unteren linken Kante von  $C_i$ ' wird die 'untere Kante von  $C_i$ '. Hat  $L$  eine positive Steigung von  $45^\circ$ , dann wird die Szene um  $45^\circ$  nach rechts gedreht, woraus  $\alpha = 90^\circ$  folgt. Im dritten Schritt von Algorithmus 1 wird aus der 'oberen linken Kante von  $C_i$ ' jetzt die 'obere Kante von  $C_i$ ', und aus der 'unteren linken Kante von  $C_i$ ' wird die 'linke Kante von  $C_i$ '.

Sei  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$  also der Winkel, um den die quadratischen  $L_1$ -Kreise im Circle-Graphen rotiert sind, nachdem die Szene so gedreht wurde, dass das Liniensegment  $L = pq$  horizontal ist. Außer bei den beiden Spezialfällen  $\alpha = 0^\circ$  und  $\alpha = 90^\circ$  wird  $\alpha$  immer zwischen der  $x$ -Achse und der unteren linken Kante des entsprechenden  $L_1$ -Kreises gemessen. Zuerst wird der Fall behandelt, in dem der Pfad oberhalb von  $L$  verläuft.

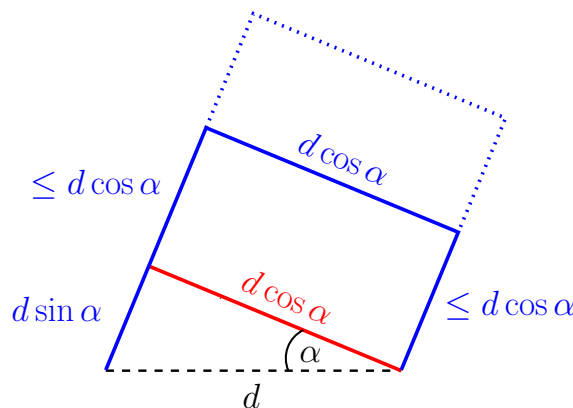


Abbildung 3.38: Pfadstück oberhalb von  $L$



In Abbildung 3.38 ist exemplarisch ein Pfadstück oberhalb von  $L$  zu sehen. Dabei ist der Pfad blau dargestellt. Mit  $d$  wird das entsprechende Teilstück von  $L$  bezeichnet, dass sich nun in horizontaler Lage befindet. Die in rot gezeichnete Kante wird für die Berechnung der Pfadlänge benötigt und verläuft parallel zur unteren linken Kante des  $L_1$ -Kreises. Im worst-case folgt der Pfad dem gepunkteten Verlauf, und aus dem auf der roten Kante aufliegendem Rechteck wird dann ein Quadrat, da die Länge der beiden seitlichen Kanten, die auf der roten Kante aufliegen, wegen Lemma 3.13 durch die Länge der roten Kante beschränkt ist. Betrachten wir dazu noch einmal die Abbildung 3.35 mit den Punkten  $n$  und  $m$ , wobei wegen Lemma 3.13  $n$  nicht links von  $m$  liegen kann, und denken wir uns die rote Kante mit  $\alpha = 45^\circ$  hinzu. Im worst-case liegen also beide Punkte genau senkrecht übereinander, und auf der imaginären roten Kante entsteht ein Quadrat. Zur Bestimmung der gesamten Pfadlänge muss auf der linken Seite noch die Kante mit Länge  $d \sin \alpha$  hinzuaddiert werden. Somit ergibt sich im worst-case für das Verhältnis aus der Länge des Pfadstückes entlang den Kanten des Circle-Graphen zu der Länge des entsprechenden Teilstückes von  $L$

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \alpha + 3 d \cos \alpha}{d} &= \sin \alpha + 3 \cos \alpha \\ &= f_1(\alpha). \end{aligned}$$

Für Pfadstücke unterhalb von  $L$  (siehe Abbildung 3.39) ergibt sich demgemäß

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \alpha + 3 d \sin \alpha}{d} &= \cos \alpha + 3 \sin \alpha \\ &= f_2(\alpha). \end{aligned}$$

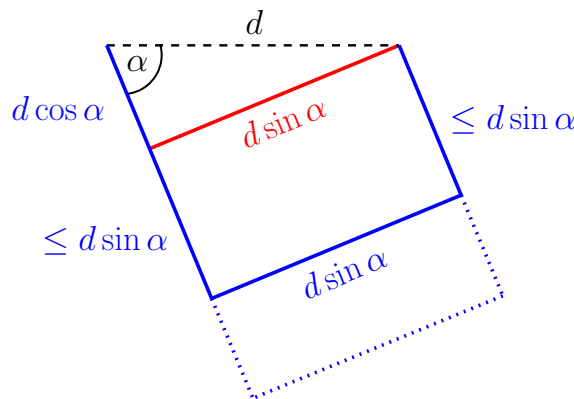


Abbildung 3.39: Pfadstück unterhalb von  $L$

Es wird nun gezeigt, dass die beiden Funktionen  $f_1(\alpha)$  und  $f_2(\alpha)$  bei  $\sqrt{10}$  ihr Maximum annehmen, wobei der Definitionsbereich auf das Intervall  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$  eingeschränkt werden kann.

Zuerst wird die Funktion  $f_1(\alpha)$  untersucht.

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \sin \alpha + 3 \cos \alpha \\ f_1'(\alpha) &= \cos \alpha - 3 \sin \alpha \\ f_1''(\alpha) &= -\sin \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $f_1'(\alpha)$  sind potentielle Extrema.

$$\begin{aligned}
 f_1'(\alpha) = 0 &\iff \cos \alpha - 3 \sin \alpha = 0 \\
 &\iff \cos \alpha = 3 \sin \alpha \\
 &\iff \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3 \\
 &\iff \tan \alpha = \frac{1}{3} \\
 &\iff \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha
 \end{aligned}$$

Ob es sich bei der gefundenen Nullstelle um ein Maximum handelt, kann durch Einsetzen der Nullstelle in  $f_1''(\alpha)$  ermittelt werden. Weitere Nullstellen gibt es innerhalb des eingeschränkten Definitionsbereiches  $[0^\circ, 90^\circ]$  nicht.

$$\begin{aligned}
 f_1''\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) &= -\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) - 3 \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
 &= -\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) - 3 \cos\left(\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{10}} - 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\
 &= -\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

Wegen  $f_1''\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) < 0$  hat  $f_1(\alpha)$  an der Stelle  $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.4^\circ$  ein Maximum.

Der Funktionswert des Maximums ist  $\sqrt{10}$ , denn es gilt  $f_1''(\alpha) = -f_1(\alpha)$ .

Jetzt wird  $f_2(\alpha)$  untersucht.

$$\begin{aligned}
 f_2(\alpha) &= \cos \alpha + 3 \sin \alpha \\
 f_2'(\alpha) &= -\sin \alpha + 3 \cos \alpha \\
 f_2''(\alpha) &= -\cos \alpha - 3 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $f_2'(\alpha)$  sind potentielle Extrema.

$$\begin{aligned}
 f_2'(\alpha) = 0 &\iff -\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 0 \\
 &\iff -\sin \alpha = -3 \cos \alpha \\
 &\iff \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \\
 &\iff \tan \alpha = 3 \\
 &\iff \arctan 3 = \alpha
 \end{aligned}$$

Testen der Nullstelle durch Einsetzen in  $f_2''(\alpha)$ . Weitere Nullstellen gibt es innerhalb des Definitionsbereiches  $[0^\circ, 90^\circ]$  nicht.

$$\begin{aligned}
 f_2''(\arctan 3) &= -\cos(\arctan 3) - 3 \sin(\arctan 3) \\
 &= -\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) - 3 \sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{10}} - 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\
 &= -\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

Wegen  $f_2''(\arctan 3) < 0$  hat  $f_2(\alpha)$  an der Stelle  $\arctan 3 \approx 71.6^\circ$  ein Maximum.

Der Funktionswert des Maximums ist  $\sqrt{10}$ , denn es gilt  $f_2''(\alpha) = -f_2(\alpha)$ .

Damit ist gezeigt, dass es für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $CG$  gibt, der nicht länger ist als  $\sqrt{10} d(p, q)$ . ■

Noch eine kleine Anmerkung zu dem gerade geführten Beweis von Lemma 3.15. Für  $\alpha = 45^\circ$  ergibt sich der Spezialfall aus Lemma 3.10, und im worst-case liegen die Punkte  $m$  und  $n$  aus Abbildung 3.35 auf einer senkrechten Linie, wodurch auf der roten Kante ein Quadrat entsteht. Im Beweis zu Lemma 3.10 hätte man nun anstelle über das rechtwinklige Dreieck mit zwei gleich langen Katheten auch wie folgt argumentieren können. Wegen

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

folgt im worst-case für das Verhältnis aus der Länge des Pfadstückes zu der Länge des entsprechenden Teilstückes von  $L$  wie nicht anders zu erwarten

$$\frac{\frac{d\sqrt{2}}{2} + \frac{d\sqrt{2}}{2} + \frac{d\sqrt{2}}{2} + \frac{d\sqrt{2}}{2}}{d} = \frac{4d\sqrt{2}}{2d} = 2\sqrt{2}.$$

Jetzt muss noch gezeigt werden, dass das Resultat von Lemma 3.15 nicht nur für den Pfad entlang den Kanten des Circle-Graphen gilt, sondern auch für den Pfad entlang den Kanten der  $L_1$ -Delaunay-Triangulation.

**Theorem 3.16** Sei  $L_1-DT(S)$  die  $L_1$ -Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene. Dann gibt es für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $L_1-DT(S)$ , der nicht länger ist als

$$\sqrt{10} d(p, q).$$

Für die Dilation gilt infolgedessen

$$\delta_{L_1-DT(S)} = \max_{p, q \in S} \frac{d_{L_1-DT}(p, q)}{d(p, q)} \leq \sqrt{10}.$$

**Beweis.** Der von Algorithmus 1 ausgegebene Pfad wandert entlang den Kanten des Circle-Graphen, der aus den quadratischen Umkreisen aller Dreiecke von  $L_1-DT(S)$  besteht. Um von Punkt zu Punkt zu gelangen wandert der Pfad also jeweils auf der Kante des quadratischen Umkreises des entsprechenden  $L_1$ -Delaunay-Dreiecks.

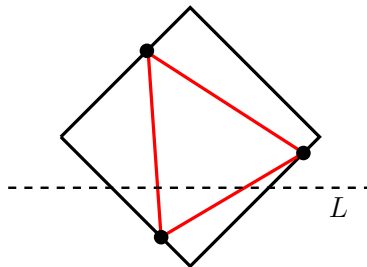


Abbildung 3.40: Abkürzung zwischen zwei Punkten

In Abbildung 3.40 ist nun deutlich zu sehen, dass die Kanten eines Dreiecks jeweils eine Abkürzung bezüglich den entsprechenden Kanten des umschließenden quadratischen  $L_1$ -Kreises darstellen. Somit kann die Dreiecksungleichung angewendet werden mit dem Ergebnis, dass der Pfad entlang den Kanten von  $L_1$ -DT( $S$ ) nicht länger sein kann als der Pfad entlang den Kanten des Circle-Graphen. ■

Eine untere Schranke für den Wert  $\Delta_{L_1-DT} = \sup \delta_{L_1-DT}(S)$  ist 2, denn es kann ein Beispiel einer  $L_1$ -Delaunay-Triangulation mit Dilation 2 angegeben werden, wie die folgende Abbildung zeigt.

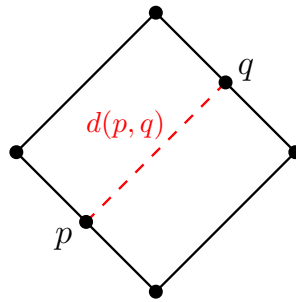


Abbildung 3.41: Beispiel mit  $\delta_{L_1-DT}(S) = 2$

Alle Punkte liegen auf einem leeren  $L_1$ -Kreis. Es gibt zwei Pfade von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des  $L_1$ -Kreises, und beide Pfade sind doppelt so lang wie der euklidische Abstand zwischen  $p$  und  $q$ . In der  $L_1$ -Metrik befindet sich die kleinste obere Schranke für den Wert der Dilation einer  $L_1$ -Delaunay-Triangulation somit in dem Intervall

$$\left[2, \sqrt{10}\right],$$

wobei der Autor vermutet, dass zumindest die obere Schranke nicht scharf ist.

### 3.2.3 Anwendung in der Bewegungsplanung

Das in Theorem 3.16 bewiesene Ergebnis hat eine nützliche Anwendung [Che86]. Gemeint ist die Bewegungsplanung in der Ebene. Man stelle sich eine Umgebung vor mit verschiedenen Hindernissen sowie einem Start- und Zielpunkt, wobei die Hindernisse eine polygonale Form haben. Sei  $R$  eine Menge von Polygonen in der Ebene, und sei  $n$  die Anzahl der Eckpunkte sämtlicher Polygone aus  $R$ . Der Startpunkt wird mit  $s$  und der Zielpunkt mit  $z$  bezeichnet. Der Einfachheit halber seien auch die beiden Punkte  $s$  und  $z$  - quasi als entartete Polygone - in der Menge  $R$  enthalten. Gesucht wird ein Pfad, der ohne die Hindernisse zu kollidieren von  $s$  zu  $z$  führt und dessen Länge weniger als  $\sqrt{10}$ -mal so lang ist wie der optimale Pfad.

Der optimale Pfad kann mit Hilfe des *Sichtbarkeits-Graphen* gefunden werden, in dem je zwei Punkte genau dann miteinander verbunden werden, wenn sie sich gegenseitig sehen können, d.h. ihr Liniensegment kommt mit keinem Hindernis in Berührung. Der  $n$ -Knoten Sichtbarkeitsgraph kann in Zeit  $O(n^2)$  berechnet werden, und der Algorithmus von Dijkstra benötigt nochmals Zeit  $O(n^2)$ , um darin den kürzesten Pfad zu bestimmen.

Eine etwas weniger optimale, aber dafür effizientere und mit der Thematik verwandte Lösung des Problems wird nun vorgestellt. Sie beruht auf einer Triangulation, in der alle Polygone aus  $R$  integriert sind, aber ansonsten größtmögliche Übereinstimmung mit der  $L_1$ -Delaunay-Triangulation aufweist (Abbildung 3.42). Diese etwas entartete Variante wird nun definiert und *Constrained  $L_1$ -Delaunay-Triangulation* genannt.

**Definition 3.17** Sei  $R$  eine Menge von polygonalen Hindernissen in der Ebene. Eine *Constrained  $L_1$ -Delaunay-Triangulation* der Menge  $R$  ist eine Triangulation  $T$  von  $R$ , so dass die Kanten aller Polygone aus  $R$  in  $T$  enthalten sind. Jede Kante  $e$  von  $T$  ist entweder eine Kante aus  $R$  oder es existiert ein  $L_1$ -Kreis  $C$  mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. Die Endpunkte von  $e$  liegen auf dem Rand von  $C$ .
2. Liegt ein Eckpunkt eines Hindernisses aus  $R$  im Innern von  $C$ , dann kann er von beiden Endpunkten der Kante  $e$  nicht gesehen werden.

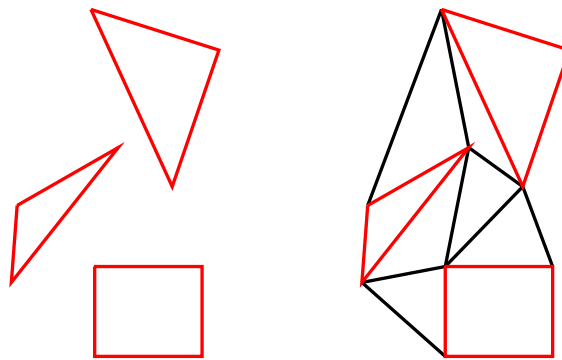


Abbildung 3.42:  $CL_1-DT(R)$  für eine Menge  $R$  aus drei Polygonen

Die Constrained  $L_1$ -Delaunay-Triangulation ist in Zeit  $O(n \log n)$  berechenbar. Da es sich hierbei um einen planaren Graphen handelt, benötigt Dijkstra's Algorithmus zum Auffinden des kürzesten Pfades ebenfalls nur Zeit  $O(n \log n)$ . Somit haben wir eine brauchbare Approximation zum optimalen Pfad.

**Theorem 3.18** Sei  $R$  eine Menge von polygonalen Hindernissen in der Ebene, und sei  $CL_1-DT(R)$  die Constrained  $L_1$ -Delaunay-Triangulation von  $R$ . Sind die Punkte  $s$  und  $z$  in  $R$  enthalten, dann gibt es einen Pfad von  $s$  nach  $z$  entlang den Kanten von  $CL_1-DT(R)$ , dessen Länge höchstens  $\sqrt{10}$ -mal so lang ist wie der optimale Pfad.

**Beweis.** Es wird nur die Beweisidee kurz skizziert. Sei  $P$  der optimale Pfad von  $s$  nach  $z$  entlang den Kanten des Sichtbarkeits-Graphen. Betrachten wir ein geradliniges Teilstück von  $P$ , welches von  $p$  nach  $q$  führt, wobei  $p$  und  $q$  Eckpunkte von Polygonen aus der Menge  $R$  sind und das sonst keine weiteren Eckpunkte enthält. Mit geringen Änderungen kann Theorem 3.16 erweitert werden, um zu zeigen, dass es entlang den Kanten von  $CL_1-DT(R)$  einen Pfad von  $p$  nach  $q$  gibt, der nicht länger als  $\sqrt{10} d(p, q)$  ist. Da es nun für jedes geradlinige Teilstück von  $P$  solch einen Pfad gibt, folgt daraus, dass es in  $CL_1-DT(R)$  einen Pfad von  $s$  nach  $z$  gibt, dessen Länge höchstens  $\sqrt{10}$ -mal so lang ist wie der optimale Pfad. ■

### 3.3 Dreieck-Metrik

Dieser Abschnitt beinhaltet den Beweis der kleinsten bekannten oberen Schranke für die Dilation von Delaunay-Triangulationen in der *Dreieck-Metrik*, wobei zur Berechnung der Dilation wieder die euklidische Metrik verwendet wird. Bei der Dreieck-Metrik, oder wie fortan kurz geschrieben wird  $\triangle$ -Metrik, basiert die konvexe Distanzfunktion zur Konstruktion der Delaunay-Triangulationen auf einem gleichseitigem Dreieck. Genau genommen handelt es sich hierbei nicht um eine Metrik, da die Symmetriebedingung nicht erfüllt ist. Diese gilt nämlich nur, wenn der Einheitskreis in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch ist. Auch wenn die Bezeichnung somit mathematisch nicht korrekt ist, wird sie aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit trotzdem beibehalten.

Es wird sich herausstellen, dass es in einer  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation zwischen je zwei Punkten immer einen Pfad gibt, der nur höchstens doppelt so lang ist wie der geradlinige euklidische Abstand. Damit ist in der  $\triangle$ -Metrik eine optimale Schranke für die Dilation von  $\triangle$ -Delaunay-Triangulationen gefunden, denn wie wir später noch sehen werden ist es möglich eine Punktmenge  $S$  zu definieren mit  $\delta_{\triangle-DT(S)} = 2$ .

#### 3.3.1 Besonderheiten der Dreieck-Metrik

Der Einheitskreis nimmt in der  $\triangle$ -Metrik die Form eines gleichseitigen Dreiecks an und ist wie in folgender Abbildung ausgerichtet.

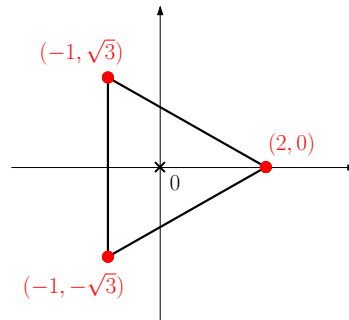


Abbildung 3.43: Der Einheitskreis in der  $\triangle$ -Metrik

Um den Abstand zweier Punkte zu ermitteln, wird der  $\triangle$ -Einheitskreis an einem Punkt zentriert und solange expandiert, bis der Rand des Kreises den zweiten Punkt enthält. Der Abstand entspricht dann dem Faktor, um den der  $\triangle$ -Einheitskreis skaliert werden muss.

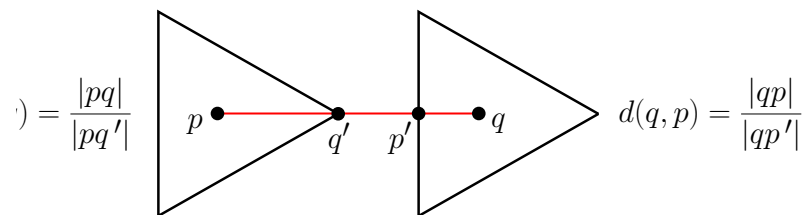


Abbildung 3.44: Symmetriebedingung wegen  $d(p, q) \neq d(q, p)$  nicht erfüllt

Sei  $S$  eine Punktmenge in der Ebene. Wie schon in der  $L_1$ -Metrik sind die  $\triangle$ -Voronoi-Regionen im Allgemeinen nicht konvex und nicht jede Kante der konvexen Hülle von  $S$  muss eine  $\triangle$ -Delaunay-Kante sein.

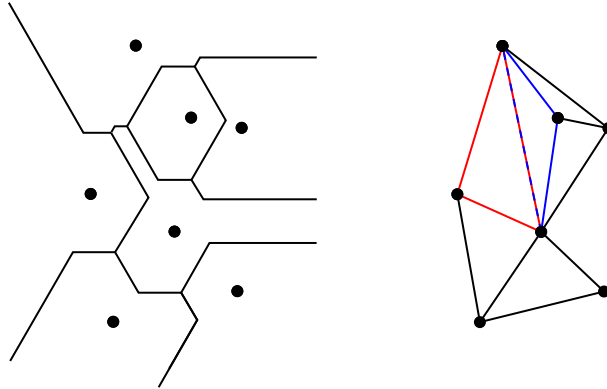


Abbildung 3.45:  $\triangle$ -Voronoi-Diagramm (links) und  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation (rechts)

Bei der Betrachtung von Abbildung 3.45 fällt auf, dass die beiden am weitesten rechts liegenden Punkte nicht durch eine  $\triangle$ -Delaunay-Kante verbunden sind. Allerdings wäre es durchaus möglich, den wie in Abbildung 3.43 ausgerichteten  $\triangle$ -Kreis so zu platzieren, dass der Rand durch beide Punkte verläuft, ohne dabei andere Punkte aus  $S$  in seinem Innern zu enthalten. Demnach müssten also beide Punkte durch eine  $\triangle$ -Delaunay-Kante verbunden sein. Desweiteren gibt es z.B. für das rote  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck oben links keinen leeren  $\triangle$ -Umkreis und für das blaue  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck daneben keinen  $\triangle$ -Kreis, dessen Rand alle drei Punkte enthält.

Die geschilderte Problematik würde hier nicht auftreten, wenn der  $\triangle$ -Kreis die entgegengesetzte Ausrichtung hätte. Deshalb sind in den folgenden Ausführungen zwei Kreise zu berücksichtigen und zu unterscheiden. Zur Abstandsberechnung wird weiterhin der nach rechts ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis verwendet und zur Überprüfung, ob es einen leeren dreieckigen Kreis um eine  $\triangle$ -Delaunay-Kante sowie um ein  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck gibt, der nach links ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis (Abbildung 3.46). Damit stets klar ist, mit welchem  $\triangle$ -Kreis wir gerade arbeiten, wird die Ausrichtung ab jetzt immer mit angegeben.

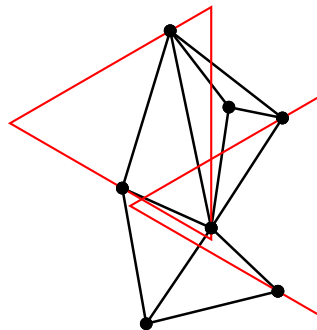


Abbildung 3.46: Der nach links ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis

Die Eigenschaft, dass es um jedes  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck einen leeren nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreis gibt, ist Grundlage der folgenden Definition einer  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation, die auch die Tatsache berücksichtigt, dass nicht für jedes Dreieck ein nach links ausgerichteter  $\triangle$ -Kreis mit allen drei Punkten auf dem Rand existiert. Damit ist die Dualität zum  $\triangle$ -Voronoi-Diagramm weiterhin gegeben.

**Definition 3.19** Die  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation einer Punktmenge  $S$  ist eine Triangulation von  $S$ , in der es für jedes Dreieck einen leeren nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreis gibt, der alle drei Punkte aus  $S$  auf dem Rand enthält.

Die Zeitkomplexität für die Konstruktion einer  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation beträgt erwartungsgemäß  $O(n \log n)$  [Dry90]. Dabei spielt es keine Rolle, ob die  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation in linearer Zeit vom entsprechenden Voronoi-Diagramm abgeleitet wird, oder ob man alternativ eine direkte Berechnungsmethode wählt.

### 3.3.2 Obere Schranke für die Dilation

Der bereits aus Abschnitt 3.2 bekannte Autor L. Paul Chew zeigt in seinem Artikel „There are planar graphs almost as good as the complete graph“ [Che89], dass

$$\delta_{\triangle-DT}(S) \leq 2$$

gilt. Der Beweis verläuft in weiten Teilen ähnlich wie der Beweis im vorigen Abschnitt für die  $L_1$ -Metrik. Dennoch wird er ausführlich erläutert, auch wenn sich einige Textpassagen wiederholen werden. Auf Gemeinsamkeiten und Abweichungen wird explizit hingewiesen.

Als Erstes wird zur Vereinfachung und Vermeidung einiger Spezialfälle in den Beweisen  $\triangle-DT(S)$  wieder auf die gesamte Ebene ausgedehnt.

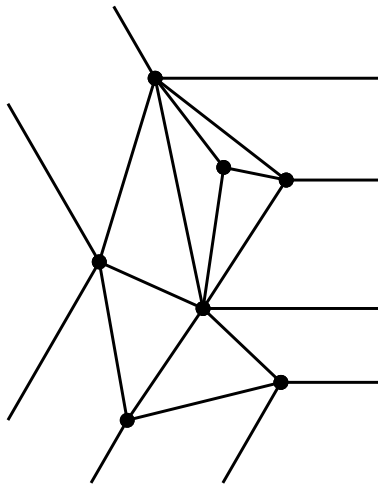


Abbildung 3.47:  $\triangle-DT(S)$  umspannt die komplette Ebene



Wie in Abbildung 3.47 zu erkennen ist, werden dazu drei Punkte benötigt, die den Eckpunkten einer unendlich großen Version des zur Abstandsberechnung definierten und somit also nach rechts ausgerichteten,  $\Delta$ -Kreises entsprechen. Wenn wir die Punkte

$$(2, 0), (-1, \sqrt{3}) \text{ und } (-1, -\sqrt{3})$$

in ein Koordinatensystem eintragen und geeignet miteinander verbinden, dann ergibt sich der nach rechts ausgerichtete  $\Delta$ -Einheitskreis. Werden diese Punkte anschließend mit einer Zahl  $w$ , mit  $w \rightarrow \infty$ , multipliziert, so erhält man für das gesuchte Dreieck die unendlich fernen Eckpunkte

$$(2w, 0), (-w, \sqrt{3}w) \text{ und } (-w, -\sqrt{3}w),$$

die zur Punktmenge  $S$  hinzugefügt werden.

Der Beweis startet wie gewohnt mit der Annahme, dass die Punkte  $p, q \in S$  horizontal auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen und dass die  $x$ -Koordinate von  $p$  kleiner als die von  $q$  ist. Mit  $L$  wird das Teilstück der  $x$ -Achse von  $p$  nach  $q$  bezeichnet.

Wenn eine  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation diese Annahme berücksichtigt, dann gibt es einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\Delta$ -DT( $S$ ) gibt, dessen Länge

$$\leq \sqrt{3} d(p, q)$$

ist. Bewiesen wird das mit Hilfe des Circle-Graphen, der aus den nach links ausgerichteten  $\Delta$ -Umkreisen aller Dreiecke von  $\Delta$ -DT( $S$ ) besteht und dessen genaue Definition in Abschnitt 3.2.2 nachgelesen werden kann. Die Einschränkung, dass das Liniensegment  $pq$  horizontal sein muss, wird später aufgehoben. In  $\Delta$ -DT( $S$ ) ist die kürzeste Pfadlänge zwischen zwei beliebigen Punkten  $p$  und  $q$  aus  $S$  immer

$$\leq 2 d(p, q).$$

**Lemma 3.20** *Sei  $\Delta$ -DT( $S$ ) die  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene. Wenn  $p \in S$  den Anfangspunkt und  $q \in S$  den Endpunkt eines horizontalen Liniensegmentes  $L = pq$  markieren, dann gibt es einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\Delta$ -DT( $S$ ), der nicht länger ist als*

$$\sqrt{3} d(p, q).$$

**Beweis.** Der im Beweis von Lemma 3.10 präsentierte Algorithmus 1, der einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des von  $L_1$ -DT( $S$ ) abgeleiteten Circle-Graphen berechnet, kann hier praktisch ohne wesentliche Änderungen übernommen werden. Es ist lediglich zu beachten, dass der von  $\Delta$ -DT( $S$ ) abgeleitete Circle-Graph nun aus lauter nach links ausgerichteten gleichseitigen Dreiecken besteht und daher Schritt 3 leicht modifiziert werden muss. Es werden trotzdem alle Schritte hier noch einmal vollständig angegeben, um lästiges hin und her blättern zu vermeiden.

ALGORITHMUS 2

1. Sei  $L = pq$  das horizontale Liniensegment von  $p$  nach  $q$ , mit  $p$  auf der linken Seite. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass außer  $p$  und  $q$  keine weiteren Punkte aus  $S$  auf  $L$  liegen, denn wenn zwischen  $p$  und  $q$  ein Punkt, z.B.  $b$ , liegen würde, dann könnte rekursiv der Pfad von  $p$  nach  $b$  sowie von  $b$  nach  $q$  berechnet werden. Das Zusammenfügen beider Pfade würde dann wieder einen Pfad von  $p$  nach  $q$  liefern. Sei  $\Delta-DT(S)'$  der Teilgraph von  $\Delta-DT(S)$ , der nur aus denjenigen  $\Delta$ -Delaunay-Dreiecken besteht, die ein Teilstück von  $L$  in ihrem Innern enthalten. Zu beachten ist, dass die Dreiecke des Teilgraphen  $\Delta-DT(S)'$  von links nach rechts entlang  $L$  geordnet sind. Der Pfad wird nun sukzessiv beim Durchlaufen von einem Knoten zum nächsten konstruiert, wobei der Algorithmus lediglich mit den Knoten und Kanten von  $\Delta-DT(S)'$  und den entsprechenden nach links ausgerichteten  $\Delta$ -Kreisen aus dem Circle-Graphen arbeitet. Mit  $P_i$  wird die aktuelle Position auf dem Pfad angezeigt. Bei dieser Position kann es sich immer nur um einen Knoten von  $\Delta-DT(S)'$  handeln. Zu Beginn ist  $i = 0$  und  $P_0$  gerade der Punkt  $p$ .
2. Sei  $\Delta_i$  das am weitesten rechts liegende Dreieck von  $\Delta-DT(S)'$ , welches  $P_i$  als Knoten enthält, und sei  $C_i$  der nach links ausgerichtete  $\Delta$ -Kreis im Circle-Graph um  $\Delta_i$ . Dann muss sich einer der beiden verbleibenden Knoten von  $\Delta_i$ , genannt  $P_{oben}$ , oberhalb  $L$  und im Uhrzeigersinn entlang des Randes  $C_i$  von  $P_i$  aus befinden. Der andere, genannt  $P_{unten}$ , liegt dementsprechend unterhalb  $L$  und ist entgegen dem Uhrzeigersinn entlang des Randes  $C_i$  von  $P_i$  aus zu erreichen. Es ist natürlich auch möglich, dass einer der beiden Knoten gerade  $q$  ist und damit auf  $L$  liegt. Daher soll der Punkt  $q$  als oberhalb sowie als unterhalb von  $L$  angesehen werden.
3. IF ( $P_i$  ist auf der oberen linken Kante von  $C_i$ )  
     THEN gehe im Uhrzeigersinn um  $C_i$   
   ELSE IF ( $P_i$  ist auf der unteren linken Kante von  $C_i$ )  
     THEN gehe entgegen dem Uhrzeigersinn um  $C_i$   
   ELSE IF ( $P_i$  ist auf der rechten Kante von  $C_i$ )  
     THEN gehe zu  $L$

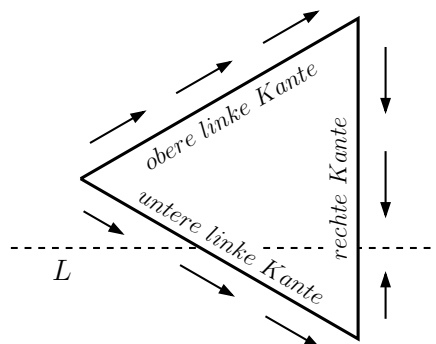


Abbildung 3.48: Bewegungsrichtungen in Schritt 3

4. Fahre in dieser Weise fort, so dass in jedem Schritt entweder  $P_{oben}$  oder  $P_{unten}$  erreicht wird, und benenne den Knoten in  $P_{i+1}$  um. Wenn  $P_{i+1}$  identisch ist mit dem Endpunkt  $q$ , dann sind wir fertig. Andernfalls wird  $i$  inkrementiert, und es geht wieder zu Schritt 2.

An dieser Stelle wird der Beweis unterbrochen, um zunächst einige Eigenschaften des von Algorithmus 2 ausgegebenen Pfades aufzuzeigen. Es folgen drei Lemmata, wobei die beiden folgenden identisch sind mit Lemma 3.11 und Lemma 3.12 aus Abschnitt 3.2.2.

**Lemma 3.21** *Alle  $\Delta_i \in \Delta\text{-DT}(S)'$  aus Schritt 2 von Algorithmus 2 sind von links nach rechts entlang  $L$  geordnet.*

**Beweis.** Die Aussage folgt direkt aus der sukzessiven Benutzung aller  $\Delta_i$ , also der jeweils am weitesten rechts liegenden Dreiecke, die  $P_i$  enthalten. ■

**Lemma 3.22** *Algorithmus 2 terminiert und liefert einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des Circle-Graphen.*

**Beweis.** In Schritt 2 befinden sich  $P_{oben}$  und  $P_{unten}$  rechts von  $P_i$ , und in Schritt 4 wird entweder  $P_{oben}$  oder  $P_{unten}$  zu  $P_{i+1}$ . Wird die Sequenz  $\{P_i\}$  der aufeinanderfolgenden Knoten  $P_i$  anstelle mit Kanten des Circle-Graphen mit Kanten des Teilgraphen  $\Delta\text{-DT}(S)'$  verbunden, so entsteht ein Pfad in  $\Delta\text{-DT}(S)'$ . Da der Teilgraph  $\Delta\text{-DT}(S)'$  nur aus einer endlichen Anzahl von  $\Delta$ -Delaunay-Dreiecken besteht, ist somit auch die Anzahl der daraus benötigten  $\Delta_i$  begrenzt. Nach Lemma 3.21 werden diese  $\Delta_i$  der Reihe nach von links nach rechts abgearbeitet bis der Endpunkt  $q$  erreicht wird. ■

Algorithmus 2 liefert einen Pfad  $\Pi$  entlang den Kanten des Circle-Graphen. Wird die Sequenz  $\{P_i\}$  der dabei besuchten Knoten  $P_i$  mit Kanten aus  $\Delta\text{-DT}(S)'$  verbunden, so erhält man den Pfad  $P$ .

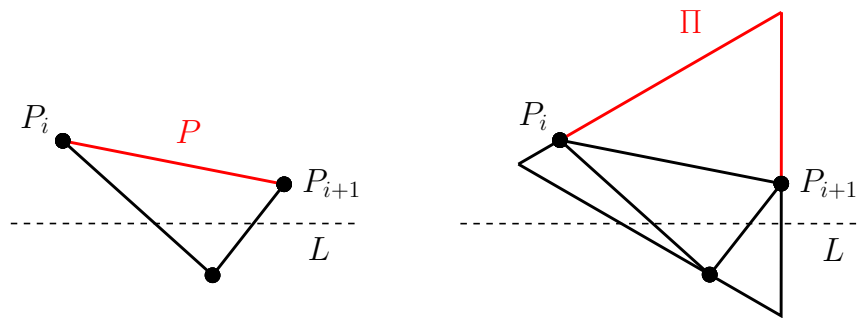


Abbildung 3.49: Unterschiedliche Routen zwischen  $P_i$  und  $P_{i+1}$

Die Sequenz  $\{P_i\}$  der Knoten  $P_i$  wird also von  $\Pi$  als auch von  $P$  in derselben Reihenfolge durchlaufen. Zum Beweis von Lemma 3.20 ist der Pfad  $P$  ausschlaggebend. Er darf die angegebene Pfadlänge nicht überschreiten. Das folgende Lemma nimmt vorweg, was in Abschnitt 3.22 erst im Beweis zu Theorem 3.16 aufgezeigt wurde, nämlich dass die Pfadlänge von  $P$  beschränkt ist durch die Länge des Pfades  $\Pi$  entlang den Kanten des Circle-Graphen.

**Lemma 3.23** *Sei  $P$  der Pfad entlang den Kanten von  $\Delta\text{-DT}(S)'$ , und sei  $\Pi$  der Pfad entlang den Kanten des von  $\Delta\text{-DT}(S)'$  abgeleiteten Circle-Graphen. Dann gilt*

$$|P| \leq |\Pi|.$$

**Beweis.** Die Aussage folgt aus der Dreiecksungleichung. Ein Blick auf Abbildung 3.49 verdeutlicht, dass die Länge einer Kante eines  $\Delta$ -Delaunay-Dreiecks kürzer ist als die Länge der entsprechenden Kante des nach links ausgerichteten  $\Delta$ -Umkreises. ■

Wir können nun mit dem Beweis von Lemma 3.20 fortfahren.

**Beweis von Lemma 3.20.** Es muss gezeigt werden, dass

$$\frac{|P|}{|L|} \leq \sqrt{3}$$

gilt, wobei es wegen  $|P| \leq |\Pi|$  auch genügt

$$\frac{|\Pi|}{|L|} \leq \sqrt{3}$$

zu zeigen. Davon wird nun auch Gebrauch gemacht, denn aufgrund der regelmäßigen Struktur eignet sich der Pfad  $\Pi$  besser für eine Längenanalyse als der Pfad  $P$ .

Die weitere Vorgehensweise ist wieder identisch mit der im Beweis von Lemma 3.10. Zunächst werden  $\Pi$  und  $L$  jeweils in einzelne Teilstücke zerlegt. Dazu wird sowohl der Pfad  $\Pi$  als auch das Liniensegment  $L$  an allen Stellen geteilt, an denen sie sich kreuzen. Die dadurch entstehenden Pfadstücke, deren Sequenz mit  $\{\Pi_j\}$  und  $\{L_j\}$  bezeichnet wird, werden dann auf ihre Länge analysiert. Für jedes  $j$  haben  $\Pi_j$  und  $L_j$  jeweils gemeinsame Start- und Endpunkte. Der Beweis ist vollbracht, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\frac{|\Pi_j|}{|L_j|} \leq \sqrt{3}$$

für jedes  $j$  gilt.

Die Liniensegmente von  $\Pi$  sind allesamt Bestandteile von nach links ausgerichteten gleichseitigen Dreiecken. Daher können die Winkel der Liniensegmente nur vier verschiedene Werte annehmen (Abbildung 3.50). Da die rechte Dreiecks-Kante genau senkrecht verläuft, sind die möglichen Werte der Winkel

- $+30^\circ$  für die linke obere Kante,
- $-30^\circ$  für die linke untere Kante,
- $+90^\circ$  für die rechte senkrechte Kante von unten kommend und
- $-90^\circ$  für die rechte senkrechte Kante von oben kommend,

wobei das horizontale Liniensegment  $L$  mit  $0^\circ$  die Messungsgrundlage bildet.

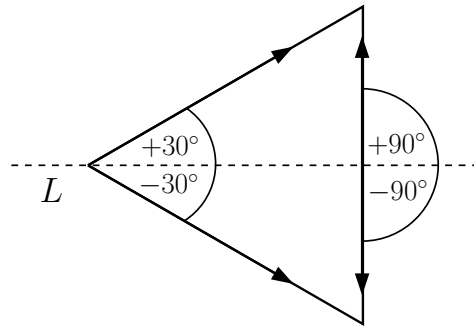


Abbildung 3.50: Winkel der Liniensegmente

Es wird nun gezeigt, dass für jedes  $j$  das jeweils erste Liniensegment von  $\Pi_j$  entweder mit  $+30^\circ$  oder mit  $-30^\circ$  startet. Für  $j = 1$  befindet sich das erste  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck von  $\triangle\text{-DT}(S)'$  rechts vom Startpunkt  $p$ . Also liegt  $p$  auf der oberen oder unteren linken Kante des leeren nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises um dieses  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck. Wegen Schritt 3 in Algorithmus 2, kann  $\Pi_1$  - das erste Teilstück von  $\Pi$  beginnend bei  $p$  - also nur mit einem Winkel von entweder  $+30^\circ$  oder  $-30^\circ$  starten. Für alle verbleibenden  $\Pi_j$  kann ähnlich argumentiert werden. Da in Schritt 2 jeweils das am weitesten rechts liegende  $\triangle$ -Delaunay-Dreieck gewählt wird, gibt es für den von Algorithmus 2 ausgegebenen Pfad  $\Pi$  nur zwei Möglichkeiten das horizontale Liniensegment  $L$  zu durchkreuzen.

1.  $P_i$  befindet sich oberhalb von  $L$  und auf der unteren linken Kante des leeren nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises  $C_i$  im Circle-Graphen.
2.  $P_i$  befindet sich unterhalb von  $L$  und auf der oberen linken Kante des leeren nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises  $C_i$  im Circle-Graphen.

Somit gilt für alle  $\Pi_j$ , dass ihre jeweils auf  $L$  startenden Liniensegmente einen Winkel von  $+30^\circ$  oder  $-30^\circ$  haben müssen.

Die Form der Pfadstücke  $\Pi_j$  ist schematisch, egal ob  $\Pi_j$  mit  $+30^\circ$  startet und oberhalb des Liniensegmentes  $L$  verläuft oder mit  $-30^\circ$  startet und unterhalb  $L$  verläuft. Die strukturelle Beschaffenheit ist bei allen Pfadstücken identisch. Daher kann die weitere Betrachtung ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf ein oberhalb von  $L$  verlaufendes Pfadstück  $\Pi_j$  gerichtet werden, denn die Form der Pfadstücke unterhalb von  $L$  entspricht lediglich dem Spiegelbild der Pfadstücke oberhalb von  $L$  (Abbildung 3.51). Wie oben bereits festgestellt, wird  $\Pi_j$  das Liniensegment  $L$  erst kreuzen, wenn  $\Pi_j$  auf einen Knoten trifft, der sich auf der unteren linken Kante eines leeren und nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises im Circle-Graphen befindet. Bis zu diesem Knoten ist der Pfadverlauf von  $\Pi_j$  dadurch gekennzeichnet, dass alle vorherigen Knoten von  $\Pi_j$  jeweils im Uhrzeigersinn mit Kanten des Circle-Graphen verbunden wurden, wie man Schritt 3 aus Algorithmus 2 entnehmen kann. Innerhalb von  $\Pi_j$  bewegt sich der Pfad also immer nur in Richtung  $+30^\circ$  oder  $-90^\circ$ . Kommt es schließlich zu einer Kreuzung mit  $L$ , so hat nur das letzte Segment von  $\Pi_j$  die Richtung  $-30^\circ$ .

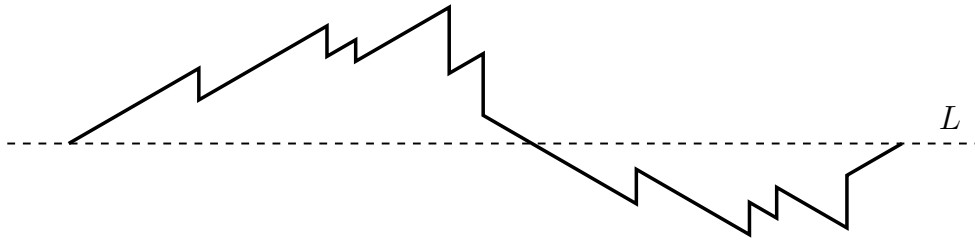


Abbildung 3.51: Pfadverlauf entlang den Kanten des Circle-Graphen

Die Grundform aller oberhalb von  $L$  verlaufenden Pfadstücke sieht demnach so aus, dass zunächst einige Kanten mit Winkeln von  $+30^\circ$  und  $-90^\circ$  vorangehen und am Ende eine Kante mit  $-30^\circ$  folgt, falls  $L$  gekreuzt wird. Ohne die Pfadlänge zu verändern, kann der Pfad wie in folgender Abbildung umgeformt werden.

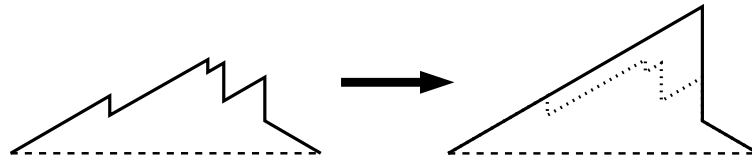


Abbildung 3.52: Pfadlänge bleibt nach Umformung konstant

In Abbildung 3.52 ist auch gut zu erkennen, wie der worst-case des Verhältnisses  $|II_j|/|L_j|$  aussieht. Das Verhältnis  $|II_j|/|L_j|$  wächst umso stärker, desto kürzer das letzte Segment von  $II_j$  ist. Daher geht beim worst-case die Länge des Endstückes, also der Kante mit Winkel  $-30^\circ$ , gegen Null, und der Pfad von  $II_j$  nimmt zusammen mit  $L_j$  die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Winkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  an.

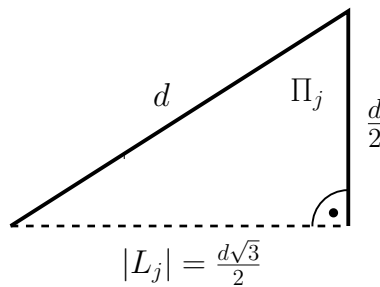


Abbildung 3.53: worst-case des Verhältnisses  $|II_j|/|L_j|$

Für Dreiecke dieser Bauart muss nun

$$\frac{|II_j|}{|L_j|} \leq \sqrt{3}$$

gezeigt werden. Da wir es hier sozusagen mit einem halben gleichseitigen Dreieck zu tun haben, setzt sich  $II_j$  aus der Hypotenuse mit Länge  $d$  und einer Kathete mit Länge  $d/2$

zusammen. Diese beiden Angaben genügen, um mit dem Satz des Pythagoras die Länge von  $L_j$  zu bestimmen.

$$\begin{aligned} |L_j|^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= d^2 \\ |L_j|^2 &= \frac{4d^2 - d^2}{4} \\ |L_j| &= \frac{\sqrt{3}d}{2} \end{aligned}$$

Wird nun die Länge von  $\Pi_j$  durch die Länge von  $L_j$  geteilt, so erhält man

$$\frac{|\Pi_j|}{|L_j|} = \frac{\frac{3d}{2}}{\frac{\sqrt{3}d}{2}} = \sqrt{3}$$

für den worst-case. Damit ist gezeigt, dass  $|\Pi_j|/|L_j| \leq \sqrt{3}$  für alle  $j$  gilt. Werden nun alle Pfadstücke wieder zusammengesetzt, dann ergibt sich insgesamt  $|\Pi|/|L| \leq \sqrt{3}$ , und da wegen Lemma 3.23  $|P| \leq |\Pi|$  ist, folgt zu guter Letzt  $|P|/|L| \leq \sqrt{3}$ . Damit ist der Beweis von Lemma 3.20 vollbracht. ■

Unter der Einschränkung, dass die Punkte  $p$  und  $q$  auf einem horizontalen Liniensegment liegen, gibt es also einen Pfad von  $p$  nach  $q$ , der nicht länger ist als  $\sqrt{3}d(p, q)$ .

Aus denselben Gründen, wie im vorigen Abschnitt 3.2.2 für die  $L_1$ -Metrik, muss nun geklärt werden, welche Konsequenzen sich ergeben, wenn das Liniensegment  $pq$  nicht mehr wie in der Voraussetzung von Lemma 3.20 horizontal ist.

In der euklidischen Metrik ist es gleichgültig, ob  $L = pq$  horizontal ist oder nicht, da erstens ein euklidischer Kreis keine Ausrichtung hat und zweitens die Größe des Umkreises eines euklidischen Delaunay-Dreiecks konstant bleibt, wenn es gedreht wird. In der  $\Delta$ -Metrik hingegen bewirkt die Drehung eines nach links ausgerichteten  $\Delta$ -Kreises im Allgemeinen eine Änderung der Ausrichtung, und wird ein  $\Delta$ -Delaunay-Dreieck gedreht, dann hat der nach links ausgerichtete  $\Delta$ -Umkreis nach der Drehung unter Umständen eine andere Größe als vorher, wodurch die Pfadlänge im Circle-Graphen betroffen ist.

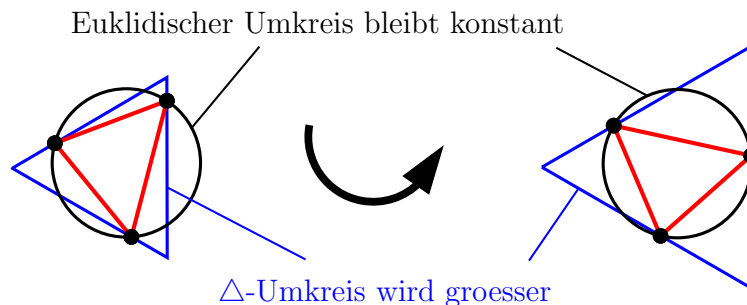


Abbildung 3.54: Drehung einer Szene

Während die Beweisidee von Lemma 3.15 darin bestand, die Szene so zu drehen, dass das eventuell schiefe Liniensegment  $pq$  wieder horizontal ist und den Winkel, um den die quadratischen Kreise im Circle-Graphen rotiert sind, anzupassen, wird im Beweis des folgenden und im Prinzip inhaltsgleichen Theorems 3.24 eine etwas andere Strategie verfolgt (Abbildung 3.55). Nachdem  $L_j \subseteq L$  in eine allgemeine Lage gebracht wurde, werden die dreieckigen Kreise des Circle-Graphen nicht mitgedreht, sondern es wird für jedes - nun nicht mehr notwendigerweise horizontales - Liniensegment  $L_j = p'q'$  ein nach links ausgerichteter  $\Delta$ -Kreis so platziert, dass  $L_j$  am linken Eckpunkt des  $\Delta$ -Kreises startet und an der gegenüberliegenden senkrechten Kante endet, also vollständig im Innern des  $\Delta$ -Kreises verläuft. Die Schräge des Liniensegmentes  $L_j$  wird durch den Winkelparameter  $\alpha$  beschrieben.

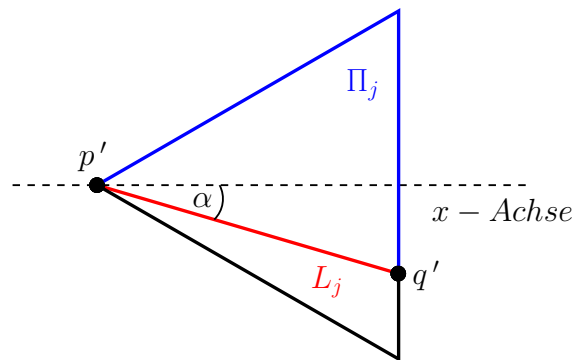


Abbildung 3.55: Beweisidee zu Theorem 3.24

**Theorem 3.24** Sei  $\Delta$ -DT( $S$ ) die  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene. Dann gibt es für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\Delta$ -DT( $S$ ), der nicht länger ist als

$$2d(p, q).$$

Für die Dilation gilt infolgedessen

$$\delta_{\Delta\text{-DT}}(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_{\Delta\text{-DT}}(p, q)}{d(p, q)} \leq 2.$$

**Beweis.** Für zwei beliebige Punkte  $p, q \in S$  wird im Circle-Graphen von  $\Delta$ -DT( $S$ ) ein Pfad gesucht, der nicht länger ist als  $2d(p, q)$ . Wie bereits bekannt, lässt sich der gezackte Pfadverlauf begradigen, ohne dabei die Länge zu verändern. Als erstes wird nun ein nach links ausgerichteter  $\Delta$ -Kreis so platziert, dass einer der Eckpunkte entweder auf  $p$  oder auf  $q$  liegt und das Liniensegment  $pq$  durch das Innere des  $\Delta$ -Kreises verläuft. In der folgenden Abbildung 3.56 ist dazu ein Beispiel gegeben.



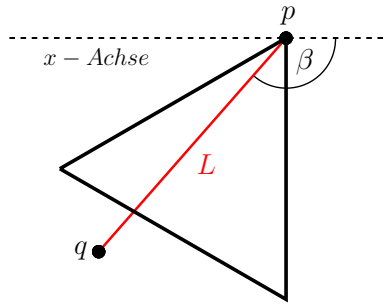


Abbildung 3.56: Platzierung des  $\triangle$ -Kreises auf das Liniensegment  $pq$

Wenn ein Eckpunkt auf  $p$  platziert ist, dann wird mit  $\beta$  der Winkel zwischen dem nun nicht mehr horizontalen Liniensegment  $L = pq$  und der  $x$ -Achse bezeichnet, bei der wir annehmen, dass sie  $p$  enthält. Aufgrund der Gleichseitigkeit des  $\triangle$ -Kreises kann  $\beta$  je nach Lage von  $L$  nur Werte aus den drei Intervallen

$$[-30^\circ, +30^\circ], [+90^\circ, +150^\circ] \text{ und } [-150^\circ, -90^\circ]$$

annehmen, wie Abbildung 3.57 verdeutlicht.

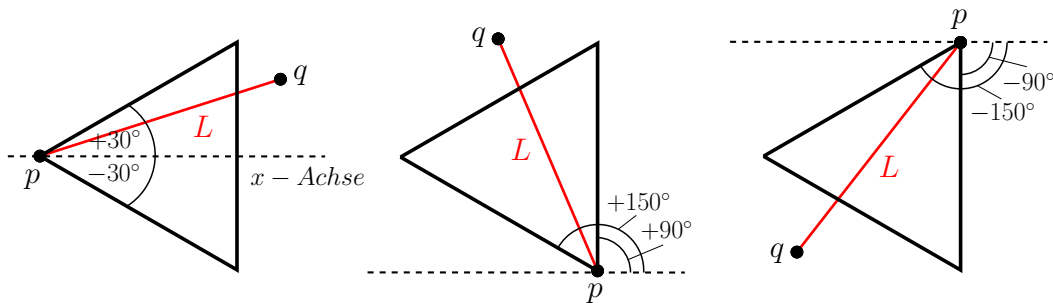


Abbildung 3.57: Die möglichen Werte von  $\beta$

Wenn der Winkel  $\beta$  zwischen  $L$  und der  $x$ -Achse nicht innerhalb dieser drei Intervalle liegt, dann wird ein Eckpunkt des  $\triangle$ -Kreises einfach auf  $q$  anstelle auf  $p$  platziert (Abbildung 3.58). Damit liegt  $\beta$  wieder innerhalb der drei Intervalle, und  $L$  verläuft durch das Innere des  $\triangle$ -Kreises.

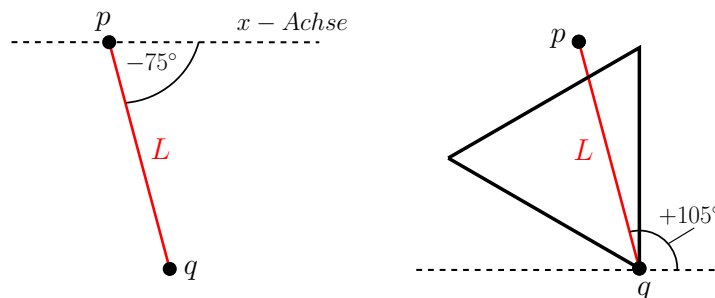


Abbildung 3.58: Winkelwerte außerhalb der drei Intervalle

Das Verhältnis  $|II|/|L|$  ändert sich nicht, wenn die Szene gedreht wird oder die Namen von  $p$  und  $q$  vertauscht werden. Daher ist es möglich ohne Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass der nach links ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis wie in folgender Abbildung auf  $p$  platziert ist.

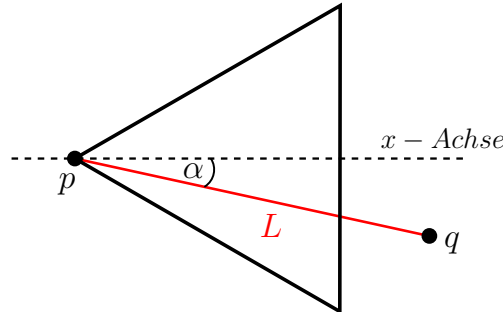


Abbildung 3.59: Standard Platzierung des  $\triangle$ -Kreises auf  $pq$

Mit  $\alpha$  wird der Winkel zwischen  $L$  und der  $x$ -Achse am Knoten  $p$  bezeichnet. Nach einer etwaigen Drehung muss der  $\triangle$ -Kreis natürlich wieder nach links ausgerichtet sein. Sollte beispielsweise eine Situation wie in Abbildung 3.60 vorliegen, dann übernimmt die Winkelhalbierende des  $\triangle$ -Kreises am Knoten  $p$  die Funktion der  $x$ -Achse.

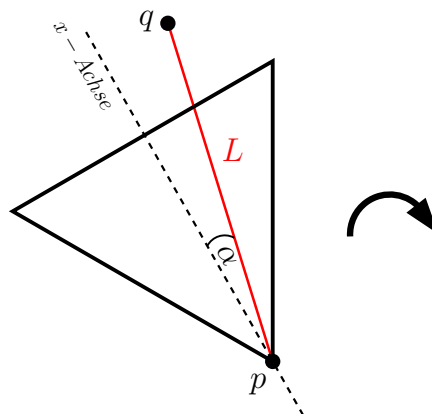


Abbildung 3.60: Drehung zur Standard Platzierung

Sei also der nach links ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis wie in Abbildung 3.59 platziert. Die Werte von  $\alpha$  können sich somit nur in dem Intervall

$$[-30^\circ, +30^\circ]$$

bewegen. Für  $\alpha = 0^\circ$  ergibt sich der Spezialfall von Lemma 3.20, in dem das Liniensegment  $L = pq$  horizontal sein musste. Der Rest des Beweises kann nun auch analog wie der von Lemma 3.20 geführt werden, nur muss der Winkel  $\alpha$  als Parameter mit in die Berechnungen einfließen, und es muss unterschieden werden, ob  $II$  oberhalb oder unterhalb von  $L$  verläuft.

Sowohl  $\Pi$  als auch  $L$  werden wieder in Teilstücke zerlegt, indem sie an allen Stellen geteilt werden, an denen sie sich kreuzen. Die resultierende Sequenz der Pfadstücke wird mit  $\{\Pi_j\}$  und  $\{L_j\}$  bezeichnet. Für jedes  $j$  haben  $\Pi_j$  und  $L_j$  jeweils gemeinsame Start- und Endpunkte. An jedem Startpunkt wird der nach links ausgerichtete  $\triangle$ -Kreis wieder neu platziert. Der Beweis ist vollbracht, wenn gezeigt werden kann, dass

$$\frac{|\Pi_j|}{|L_j|} \leq 2$$

für jedes  $j$  gilt. Betrachten wir zunächst den Fall, in dem  $\Pi_j$  oberhalb von  $L_j$  verläuft. Sei  $p'$  der Startpunkt und  $q'$  der Endpunkt für ein Pfadstück  $\Pi_j$ . Im worst-case besteht der Pfad dann aus der kompletten  $+30^\circ$ -Kante und einem Stück der  $-90^\circ$ -Kante des nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises.

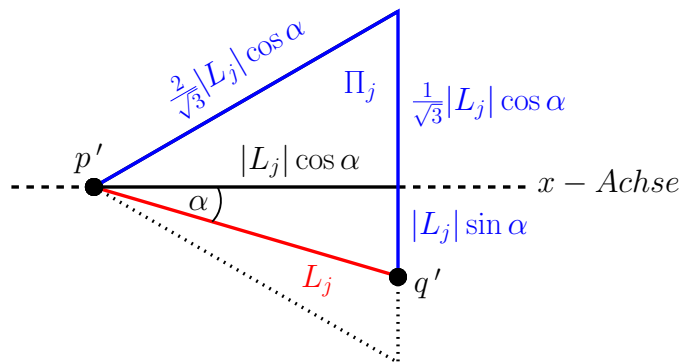


Abbildung 3.61: worst-case für  $\Pi_j$  oberhalb von  $L$

Die Längen der Dreiecksseiten können mit den Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck in Abhängigkeit von  $L_j$  und  $\alpha$  mühelos berechnet werden. Hilfreich ist dabei die Kenntnis der Werte  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$  und  $\sin 30^\circ = 1/2$ . Für  $\Pi_j$  ergibt sich somit insgesamt die Länge

$$\begin{aligned} |\Pi_j| &= \frac{2}{\sqrt{3}} |L_j| \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} |L_j| \cos \alpha + |L_j| \sin \alpha \\ &= \sqrt{3} |L_j| \cos \alpha + |L_j| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Wird  $|\Pi_j|$  durch  $|L_j|$  geteilt, dann erhält man

$$\begin{aligned} \frac{|\Pi_j|}{|L_j|} &= \frac{\sqrt{3} |L_j| \cos \alpha + |L_j| \sin \alpha}{|L_j|} \\ &= \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \\ &= f_1(\alpha). \end{aligned}$$

Bei  $\alpha = 30^\circ$  erreicht diese Schranke ihren maximalen Wert 2, wie nun gezeigt wird. Der Definitionsbereich kann dabei auf das Intervall  $\alpha \in [-30^\circ, +30^\circ]$  eingeschränkt werden.

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \\ f_1'(\alpha) &= -\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha \\ f_1''(\alpha) &= -\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $f_1'(\alpha)$  sind potentielle Extrema.

$$\begin{aligned}
 f_1'(\alpha) = 0 &\iff -\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = 0 \\
 &\iff \cos \alpha = \sqrt{3} \sin \alpha \\
 &\iff \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \\
 &\iff \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &\iff \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \alpha
 \end{aligned}$$

Ob es sich bei der gefundenen Nullstelle um ein Maximum handelt, kann durch Einsetzen der Nullstelle in  $f_1''(\alpha)$  ermittelt werden. Weitere Nullstellen gibt es innerhalb des eingeschränkten Definitionsbereiches  $[-30^\circ, +30^\circ]$  nicht.

$$\begin{aligned}
 f_1''\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &= -\sqrt{3} \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
 &= -\sqrt{3} \cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
 &= -\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Wegen  $f_1''\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) < 0$  hat  $f_1(\alpha)$  an der Stelle  $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$  ein Maximum.

Der Funktionswert des Maximums ist 2, denn es gilt  $f_1''(\alpha) = -f_1(\alpha)$ .

Es verbleibt der Fall, in dem  $\Pi_j$  unterhalb von  $L_j$  verläuft (Abbildung 3.62). Hier setzt sich der Pfad dann aus der kompletten  $-30^\circ$ -Kante und einem Stück der  $+90^\circ$ -Kante des nach links ausgerichteten  $\triangle$ -Kreises zusammen.

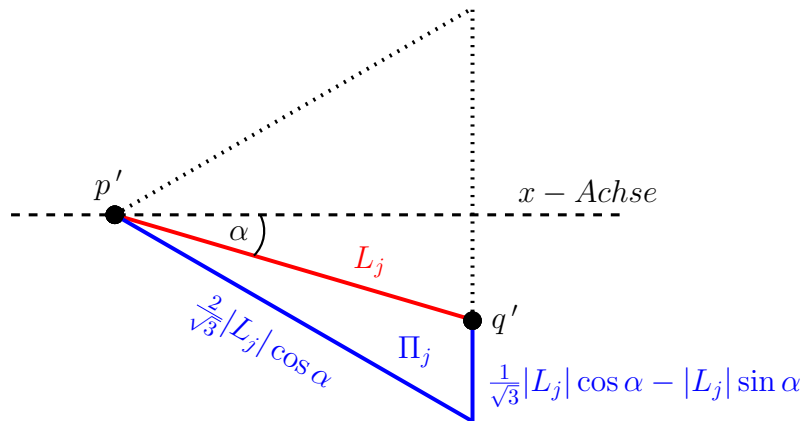


Abbildung 3.62: worst-case für  $\Pi_j$  unterhalb von  $L$

Hier ergibt sich für  $\Pi_j$  insgesamt die Länge

$$\begin{aligned}
 |\Pi_j| &= \frac{2}{\sqrt{3}} |L_j| \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} |L_j| \cos \alpha - |L_j| \sin \alpha \\
 &= \sqrt{3} |L_j| \cos \alpha - |L_j| \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Wird nun  $|II_j|$  wieder durch  $|L_j|$  geteilt, dann erhält man mit

$$\begin{aligned}\frac{|II_j|}{|L_j|} &= \frac{\sqrt{3}|L_j|\cos\alpha - |L_j|\sin\alpha}{|L_j|} \\ &= \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha \\ &= f_2(\alpha)\end{aligned}$$

eine Schranke, die bei  $\alpha = -30^\circ$  ihren maximalen Wert 2 erreicht, wie nun gezeigt wird. Der Definitionsbereich kann dabei wieder auf das Intervall  $\alpha \in [-30^\circ, +30^\circ]$  eingeschränkt werden.

$$\begin{aligned}f_2(\alpha) &= \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha \\ f_2'(\alpha) &= -\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha \\ f_2''(\alpha) &= -\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha\end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $f_2'(\alpha)$  sind potentielle Extrema.

$$\begin{aligned}f_2'(\alpha) = 0 &\iff -\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 0 \\ &\iff -\cos\alpha = \sqrt{3}\sin\alpha \\ &\iff \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\sqrt{3} \\ &\iff \tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\iff \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \alpha\end{aligned}$$

Testen der Nullstelle durch Einsetzen in  $f_2''(\alpha)$ . Weitere Nullstellen gibt es innerhalb des Definitionsbereiches  $[-30^\circ, +30^\circ]$  nicht.

$$\begin{aligned}f_2''\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &= -\sqrt{3}\cos\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= -\sqrt{3}\cos\left(-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

Wegen  $f_2''\left(\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) < 0$  hat  $f_2(\alpha)$  an der Stelle  $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30^\circ$  ein Maximum.

Der Funktionswert des Maximums ist 2, denn es gilt  $f_1''(\alpha) = -f_1(\alpha)$ .

Da wegen Lemma 3.23  $|P| \leq |II|$  gilt, folgt nach Zusammensetzung aller Pfadstücke  $|P|/|L| \leq 2$ . Also gibt es einen Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\triangle\text{-}DT(S)$ , der nicht länger als  $2d(p, q)$  ist. ■

### 3.3.3 Nachtrag

Die Schranke aus Theorem 3.24 ist optimal [Che89], denn es kann ein Beispiel einer  $\triangle$ -Delaunay-Triangulation mit Dilation 2 angegeben werden, wie Abbildung 3.63 zeigt.

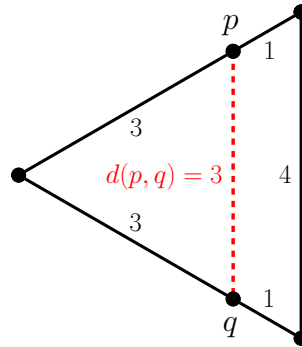


Abbildung 3.63: Beispiel mit  $\delta_{\Delta-DT}(S) = 2$

Alle Punkte liegen auf einem leeren nach links ausgerichteten  $\Delta$ -Kreis. Es gibt zwei Pfade von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des  $\Delta$ -Kreises, und beide Pfade sind doppelt so lang wie der euklidische Abstand zwischen  $p$  und  $q$ . Es gilt also

$$\Delta_{\Delta-DT} = \sup \delta_{\Delta-DT}(S) = 2.$$

Bisher ist keine planare Graphklasse bekannt, die eine kleinere obere Schranke als 2 für den Wert der Dilation hat.

In einer Constrained  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation sind die Kanten einer Menge  $R$  von Polygonen integriert, die z.B. in der Bewegungsplanung Hindernisse darstellen können. Analog zu Abschnitt 3.2.3 lässt sich zeigen, dass ein kürzester Pfad zwischen zwei Punkten entlang den Kanten von  $C\Delta-DT(R)$  in Zeit  $O(n \log n)$  gefunden werden kann. Dabei ist der Pfad wegen Theorem 3.24 nur höchstens doppelt so lang wie der optimale Pfad.

### 3.4 Zusammenfassung und Diskussion

Die bisherigen Ergebnisse für die maximale Dilation von Delaunay-Triangulationen in den verschiedenen Metriken lassen sich am besten in einer Tabelle zusammenfassen. Dabei beziehen sich die Angaben für die untere- und obere Schranke jeweils auf den Wert  $\Delta_{DT} = \sup \delta_{DT}(S)$ .

	euklidische Metrik [KG92]	$L_1$ -Metrik [Che86]	$\Delta$ -Metrik [Che89]
untere Schranke	$\pi/2$	2	2
obere Schranke	$2\pi/(3 \cos(\pi/6)) \approx 2.42$	$\sqrt{10}$	2

Die maximale Dilation einer dilationsoptimalen Triangulierung kann nicht kleiner als  $\sqrt{2}$  sein, was in Abschnitt 3.1.1 anhand der Knoten eines Quadrats gezeigt wurde. Andererseits ist nicht bekannt, ob eine planare Graphklasse existiert, deren kleinste obere Schranke für die Dilation kleiner als 2 ist. Diese offene Frage macht deutlich, wie gut das Ergebnis für die  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation ist, für die mit 2 eine optimale Schranke existiert.

In der  $L_1$ -Metrik klappt zwischen unterer- und oberer Schranke eine große Lücke. Es wird vermutet [Che86], dass zumindest die obere Schranke nicht scharf ist. Wo der exakte Wert für  $\Delta_{L_1-DT}$  liegt bleibt eine offene Frage.

Die obere Schranke in der euklidischen Metrik ist wahrscheinlich auch nicht scharf. Hier wird angenommen [Che89], dass  $\Delta_{DT}$  nahe bei  $\pi/2$  liegt. In Abschnitt 3.1.1 wurde ein Beispiel angegeben, bei dem sich  $\delta_{DT}(S)$  beliebig scharf  $\pi/2$  nähert, wenn entsprechend viele Punkte auf dem Rand eines leeren Kreises hinzugefügt werden. Bisher ist eine größere untere Schranke als  $\pi/2$  für  $\Delta_{DT}$  nicht bekannt.

Der Beweis für die obere Schranke in der  $L_1$ -Metrik stammt vom selben Autor wie der Beweis in der  $\Delta$ -Metrik. Beide Beweise basieren auf dem gleichen Ansatz, nämlich der Konstruktion eines Pfades entlang den Kanten des jeweiligen Circle-Graphen, dessen Länge mathematisch abgeschätzt wird und der die Länge des Pfades entlang den Kanten der Delaunay-Triangulation nach oben beschränkt. Allerdings sind die Ergebnisse von unterschiedlicher Qualität. Während die obere Schranke in der  $\Delta$ -Metrik optimal ist, gibt es in der  $L_1$ -Metrik vermutlich noch Verbesserungspotential, wie ein Blick auf obige Tabelle verdeutlicht, wobei es auch sein kann, dass die obere Schranke scharf und nur die untere Schranke unscharf ist. Generell lässt sich aber sagen, dass die Beschaffenheit der entsprechenden Einheitskreise das Ergebnis beeinflusst. Um eine möglichst scharfe obere Schranke für die Dilation zu erhalten, muss die Abweichung zwischen dem Pfadverlauf entlang den Kanten der Delaunay-Triangulation und der Traversierung entlang den Rändern der entsprechenden Einheitskreise klein sein. In der  $\Delta$ -Metrik passt sich der Pfad entlang den Kanten des Circle-Graphen besser dem Pfad entlang den Delaunay-Kanten an als in der  $L_1$ -Metrik.

In der euklidischen Metrik wurden zwei obere Schranken präsentiert, die beide auf unterschiedlichen Beweisideen beruhen und deren Werte eine erhebliche Diskrepanz aufweisen. Die chronologisch erste hat den Wert

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \pi \approx 5.08,$$

und die Beweisidee besteht darin, einen möglichst kurzen Pfad zwischen zwei Punkten  $p$  und  $q$  aus der Punktmenge  $S$  entlang den Kanten der Delaunay-Triangulation zu finden. Im Prinzip wird hier eine ähnliche Strategie angewendet wie bei der  $L_1$ -Metrik und bei der  $\Delta$ -Metrik, nur wird anstelle des Circle-Graphen der direkte  $DT$ -Pfad konstruiert. Betrachtet werden aber immer nur ausschließlich diejenigen Delaunay-Dreiecke, die vom Liniensegment  $pq$  geschnitten werden. Der euklidische Circle-Graph eignet sich nicht für die Bearbeitung des dritten Schrittes von Algorithmus 1 bzw. Algorithmus 2, der die Bewegungsrichtungen des Pfades auf dem Kreis bestimmt, da eine Positionsangabe, wie 'obere linke Kante' oder 'untere linke Kante' auf dem Rand eines euklidischen Kreises nicht möglich ist. Aber auch die anschließende Umformung der Pfadstücke, bei der die gezackten Pfadrouten begradigt werden, wirft Probleme auf, die beim  $L_1$ -Kreis und beim  $\Delta$ -Kreis nicht auftreten und die gegen einen deckungsgleichen Ansatz sprechen. Zur Abschätzung der Pfadlänge werden auch nicht die Bogenabschnitte der Kreise um die entsprechenden Delaunay-Dreiecke verwendet, sondern die Kreise, deren Rand jeweils zwei benachbarte Punkte des direkten  $DT$ -Pfades enthalten und deren Mittelpunkte auf dem Liniensegment  $pq$  liegen. Die resultierende obere Schranke ist allerdings ziemlich groß, obwohl die Pfadlänge durch Einfügen von Abkürzungen noch verkürzt wird, so dass der Pfadverlauf möglichst selten das Liniensegment zwischen den zwei zu verbindenden Punkten  $p$  und  $q$  kreuzt.

Ein völlig anderer Ansatz wird im Beweis der chronologisch zweiten und bislang auch kleinsten bekannten oberen Schranke für die Dilation einer Delaunay-Triangulation in der euklidischen Metrik angewendet. Diese Schranke ist um mehr als die Hälfte kleiner als die chronologisch erste und hat den Wert

$$\frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 2.42.$$

Diesmal wird kein Pfad konstruiert, sondern mathematisch argumentiert, indem ein Induktionsbeweis über den euklidischen Abstand  $d(p, q)$  aller Punktepaare  $(p, q)$  mit  $p, q \in S$  geführt wird. Den Induktionsanfang bilden dabei die zwei zueinander dichtesten Punkte  $p$  und  $q$  aus  $S$ , für die  $d_{DT}(p, q) = d(p, q)$  gilt, da das Liniensegment  $pq$  eine Kante der Delaunay-Triangulation von  $S$  sein muss.

Trotz unterschiedlicher Vorgehensweisen in den Beweisen gibt es doch eine Gemeinsamkeit. Zur Abschätzung der Pfadlänge werden immer die Kreise der jeweiligen Metriken benutzt.

Die Komplexität der Beweise lässt erahnen, dass es erheblichen Aufwand bedarf die bewiesenen Schranken zu verschärfen.



## Kapitel 4

# Dilation verwandter Graphklassen

Neben den Delaunay-Triangulationen gibt es natürlich noch weitere Graphklassen, die einen vollständigen Graphen bezüglich der Dilation gut approximieren. Dabei sind im Kontext zu Kapitel 3 vor allem jene Graphklassen interessant, die mit den Delaunay-Triangulationen mehr oder weniger strukturelle Ähnlichkeiten aufweisen. Eine kleine Auswahl wird in diesem Kapitel näher betrachtet, wobei sowohl zur Berechnung der Dilation als auch zur Konstruktion der Graphen ausschließlich die euklidische Metrik verwendet wird.

Bei den  $\theta$ -Graphen und den  $\beta$ -Skeletons ist die Dilation abhängig von einem Parameter, der die Konstruktion der Graphen beeinflusst. Während die Dilation der  $\theta$ -Graphen mit größer werdendem Parameter  $k$  kleiner wird, ist sie für die  $\beta$ -Skeletons nur dann beschränkt, wenn sich der Parameter  $\beta$  in dem Intervall  $[0, 2]$  bewegt. Für  $\beta > 2$  ist die Dilation definitionsgemäß unendlich, da die  $\beta$ -Skeletons dann nicht mehr zusammenhängend sind.

### 4.1 Planare Graphen mit geringer Dilation

Bevor wir uns weiteren konkreten Graphklassen widmen, sei zunächst eine allgemeine Aussage über die Dilation beliebiger planarer Graphen angesprochen. Es handelt sich hierbei im Wesentlichen um eine kurze Zusammenfassung des Artikels „Which triangulations approximate the complete graph?“ von Gautam Das und Deborah Joseph [DJ89].

Die Dilation eines planaren Graphen wird durch eine von zwei Größen abhängige Konstante  $c$  beschränkt, wenn er zwei Bedingungen erfüllt, die in der einschlägigen Literatur als *good polygon property* und als *diamond property* bezeichnet werden.

Die *good polygon property* gilt als erfüllt, wenn der kürzeste Pfad zwischen je zwei gegenseitig sichtbaren Knotenpunkten einer Fläche nicht viel länger ist als der euklidische Abstand. Genauer, sei  $z$  eine Konstante und  $G$  ein planarer Graph der Punktmenge  $S$ . Weiter seien für jede Fläche  $f$  von  $G$  mit  $p, q \in S$  zwei Punkte auf dem Rand von  $f$  gegeben, so dass das Liniensegment  $pq$  ganz in  $f$  enthalten ist. Dann muss die Länge des kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  entlang des Randes von  $f$  kleiner als  $z \cdot d(p, q)$  sein. In Abbildung 4.1 ist die *good polygon property* nur für große  $z$ -Werte erfüllt, da das Verhältnis aus der Pfadlänge von  $p$  nach  $q$  zum euklidischen Abstand sehr hoch ist.

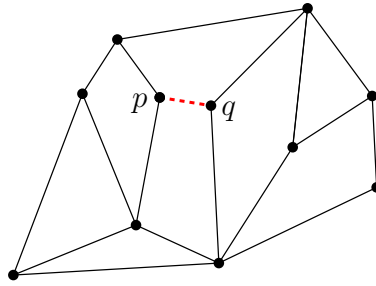


Abbildung 4.1: Good polygon property für  $z \leq \approx 7.35$  nicht erfüllt

Die *diamond property* soll gewährleisten, dass eine Kante kein zu langes Hindernis zwischen zwei Knotenpunkten darstellt (Abbildung 4.2). Dazu sind zu jeder Kante  $e$  von  $G$  die beiden gleichschenkligen Dreiecke zu betrachten, die dadurch entstehen, dass  $e$  als Basiskante dient und die Basiswinkel  $\alpha$  zwischen  $e$  und den gleich langen Dreieckskanten kleiner als  $\pi/2$  sind. Zur Erfüllung der diamond property - bezüglich eines festen Winkels  $\alpha$  - dürfen höchstens in einem der beiden Dreiecke Punkte aus  $S$  enthalten sein.

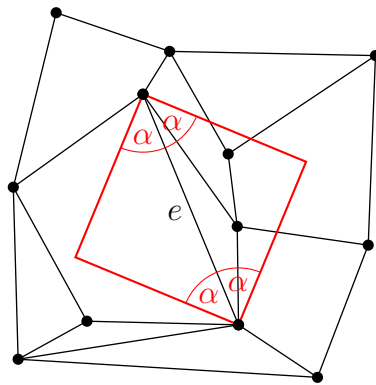


Abbildung 4.2: Diamond property für  $\alpha = 45^\circ$  erfüllt, da zumindest immer ein Dreieck basierend auf  $e$  keine Knotenpunkte enthält

Werden beide Eigenschaften mit kleiner Konstante  $z$  und großem Winkel  $\alpha$  von einem planaren Graphen  $G$  erfüllt, dann wird der vollständige Graph bezüglich der Dilation gut von  $G$  approximiert.

**Theorem 4.1** Sei  $S$  eine  $n$ -elementige Punktmenge mit  $p, q \in S$ , und sei  $G$  ein planarer Graphalgorithmus mit Eingabe  $S$  und Ausgabe  $G(S)$ . Wenn  $G(S)$  die good polygon property und die diamond property für eine beliebige Konstante  $z$  und einen beliebigen Winkel  $\alpha < \pi/2$  erfüllt, dann existiert eine von  $z$  und  $\alpha$  abhängige Konstante  $c_{\alpha,z}$  mit

$$c_{\alpha,z} = \frac{8\pi^2 z}{\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)},$$

die eine obere Schranke für die Dilation von  $G(S)$  darstellt. Es gilt also

$$\delta_G(S) = \max_{p,q \in S} \frac{d_G(p,q)}{d(p,q)} \leq c_{\alpha,z}.$$

Der Beweis ist recht komplex und umfangreich. Daher wird hier nur die Beweisidee kurz skizziert. Er verläuft aber in weiten Teilen ähnlich wie der Beweis aus Abschnitt 3.1.2, wo gezeigt wurde, dass  $((1 + \sqrt{5})/2)\pi \approx 5.08$  eine obere Schranke für den Wert der Dilation einer Delaunay-Triangulation ist. Zunächst wird entlang den Kanten von  $G(S)$  der *direkte G-Pfad* zwischen zwei beliebigen Punkten konstruiert, die zur Vereinfachung auf der  $x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegen. Verläuft der Pfad nicht einseitig, dann entscheidet eine *shortcut condition* an den entsprechenden Stellen, ob der Pfadverlauf weiterhin dem direkten  $G$ -Pfad entspricht oder Abkürzungen eingefügt werden. Anschließend muss die Analyse des Pfades die Beschränktheit der Pfadlänge im worst case attestieren.

Es stellt sich nun die Frage, welche planaren Graphalgorithmen sowohl die good polygon property als auch die diamond property erfüllen? Prädestinierte Kandidaten sind die Triangulationen, erfüllen sie doch die good polygon property mit  $z = 1$  in jedem Fall. In [DJ89] wird gezeigt, dass die *Delaunay-Triangulation* beide Bedingungen erfüllt, ebenso die *greedy-Triangulation*, bei der nacheinander die jeweils kürzestmögliche Kante eingefügt wird und die *minimum weight Triangulation*, bei der die Summe der Kantenlängen über alle Triangulationen derselben Punktmenge minimal ist. Aus [Epp99] ist zu entnehmen, dass auch die *min-max edge length Triangulation*, bei der die Länge der längsten Kante minimiert wird und die *min-max angle Triangulation*, mit der kleinsten Winkelfolge, wo also der größte Dreieckswinkel minimal ist, beide Bedingungen erfüllen.

## 4.2 Teilgraphen von Delaunay-Triangulationen

Bei den meisten Anwendungen eines Graphen ist neben der Dilation aus Kostengründen auch die Summe der Längen aller Kanten mit zu berücksichtigen. Daher stellt sich die Frage, ob ein planarer Graph zu einer Punktmenge  $S$  konstruiert werden kann, der

1. den vollständigen Graphen bezüglich der Dilation gut approximiert und
2. dessen summierte Kantenlänge beschränkt ist durch ein konstantes Vielfaches der Gesamtlänge des minimalen Spannbaums?

Da sich  $n$ -elementige Punktmenge  $S$  definieren lassen, so dass die Gesamtlänge der Kanten von  $DT(S)$   $n$ -mal so lang ist wie der minimale Spannbaum [LL89], scheitert die Graphklasse der Delaunay-Triangulationen an der zweiten Bedingung. Für spezielle Teilgraphen der Delaunay-Triangulationen gibt es zwischen beiden Bedingungen allerdings einen interessanten Zusammenhang.

Die Summe der Kantenlängen eines zusammenhängenden Graphen kann bestenfalls gleich der Länge des minimalen Spannbaums sein. Der *minimale Spannbaum* zu einem gegebenen Graphen  $G$  ist ein Baum, der alle Knoten des Graphen enthält und dessen Summe aller Kantenlängen minimal ist. Man kann z.B. - nebenbei bemerkt - zeigen, dass mit diesem Baum das Problem des Handlungsreisenden approximiert werden kann, wobei der approximierte Rundweg um einen minimalen Spannbaum höchstens doppelt so lang ist wie der optimale Rundweg [Kle97]. Die Dilation eines minimalen Spannbaums ist natürlich aufgrund der geringen Kantenzahl entsprechend hoch, was auf einen *trade off* zwischen beiden Bedingungen hindeutet.

Aus einer Delaunay-Triangulation lässt sich der minimale Spannbaum in Zeit  $O(n \log n)$  ableiten, da er als Teilgraph in  $DT(S)$  enthalten ist.

Sei  $t$  die Länge des minimalen Spannbaums einer Punktmenge  $S$  in der Ebene. In [LL89] wird ein Algorithmus präsentiert, dessen Eingabe aus einer Punktmenge  $S$  und einer positiven rationalen Zahl  $r$  besteht. Als Ausgabe liefert er einen Teilgraphen  $TG(S)$  der Delaunay-Triangulation  $DT(S)$ , bei dem die Gesamtlänge der Kanten durch

$$(2r + 1)t$$

nach oben beschränkt ist. Für die Dilation von  $TG(S)$  gilt

$$\delta_{TG(S)} \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right) \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Hierbei handelt es sich bei dem zweiten Faktor um die kleinste bekannte obere Schranke für die Dilation einer Delaunay-Triangulation in der euklidischen Metrik [KG92]. Sie wurde in Abschnitt 3.1.3 bewiesen. Leider gibt es zwischen beiden Schranken einen trade off, da eine kürzere Gesamtlänge der Kanten mit einer größeren Dilation bezahlt werden muss und umgekehrt.

Der Algorithmus berechnet zunächst die Delaunay-Triangulation der Punktmenge  $S$ . Wenn  $DT(S)$  vorliegt, dann benötigt die restliche Konstruktion von  $TG(S)$  nur noch lineare Zeit.

### 4.3 Fixed-Angle $\theta$ -Graph

Sei  $G$  ein euklidischer Graph der Punktmenge  $S$  mit  $p, q \in S$ . Dann gibt es auf einem kürzesten Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $G$  einen Punkt  $b$ , der unmittelbar mit  $p$  benachbart ist.

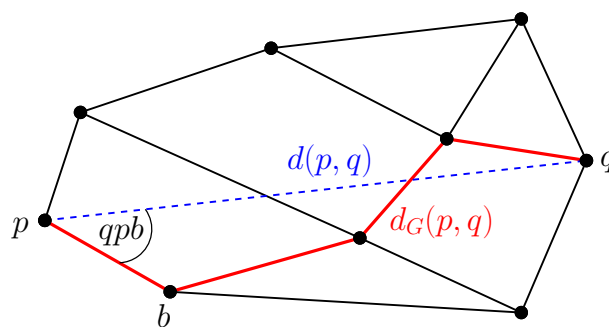


Abbildung 4.3: Graph mit Winkel  $qpb$

Bei genauerer Betrachtung des Winkels  $qpb$  ist folgende rein intuitive Aussage nicht ganz abwegig. Umso kleiner der Winkel  $qpb$  ist, desto kleiner ist  $d_G(p, q)$  im Verhältnis zu  $d(p, q)$ . Andererseits wird das Verhältnis von  $d_G(p, q)$  zu  $d(p, q)$  umso größer, desto größer der Winkel  $qpb$  ist.

Diese Überlegung motiviert zur Konstruktion eines Graphen, bei dem jeder Punkt jeweils mit einem nahen Nachbarpunkt aus einem bestimmten Winkelintervall verbunden wird. In dem Artikel „Approximating the complete Euclidean graph“ von J. Mark Keil [Kei88] wird ein Graph definiert, der diese Überlegung auch berücksichtigt. Er trägt den Namen *Fixed-Angle  $\theta$ -Graph*, kurz  *$\theta$ -Graph*. Die ursprüngliche Intention des Autors war die Bestimmung einer Graphklasse, die möglichst gut die Klasse der vollständigen Graphen approximiert. Inwieweit  $\theta$ -Graphen diesem Anspruch gerecht werden, wird im nächsten Abschnitt untersucht. Dabei ist die Dilation abhängig von einer Zahl  $k$ , die für die Anzahl der Winkelintervalle steht. Umso größer die Zahl  $k$  gewählt wird, desto kleiner ist die Dilation.

### 4.3.1 Definition

Gegeben sei eine Punktmenge  $S$  in der Ebene und eine ganzzahlige Konstante  $k$  mit  $k > 4$ . Dann wird der  $\theta$ -Graph  $\theta(S)$  mit Winkel  $\theta = 2\pi/k$  wie folgt konstruiert. An jedem Punkt in  $S$  werden zunächst sternförmig  $k$  Hilfsstrahlen erzeugt, so dass die Strahlen bezüglich der positiven  $x$ -Achse die Winkel  $2\pi(i-1)/k$  bilden, mit  $i = 1, 2, \dots, k$ . Somit ist jeder Punkt Ursprung von  $k$  Strahlen, die zum Einfügen der Kanten benötigt werden. In der folgenden Abbildung sind die Strahlen exemplarisch für einen Punkt  $p$  und  $k = 6$  gestrichelt eingezeichnet, wodurch sich eine Größe von  $\pi/3$  oder  $60^\circ$  für jedes Winkelintervall ergibt.

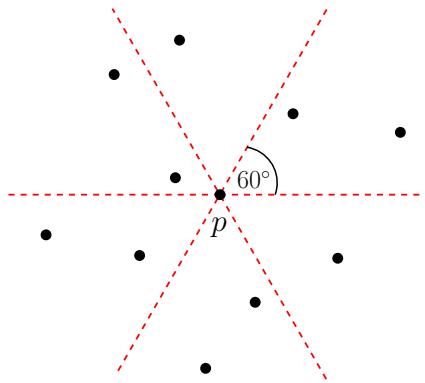


Abbildung 4.4:  $k = 6$  Hilfsstrahlen mit Ursprung  $p$

Durch die Strahlen wird die Ebene in  $k$  gleich große Regionen zerlegt. Jeder Punkt aus  $S$  liegt in einer bestimmten Region. Die Menge der Punkte, die einer bestimmten Region angehören wird mit  $S_i(p)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  bezeichnet. Genauer, sei  $q \in S$  und  $\varphi$  der Winkel zwischen dem Liniensegment  $pq$  und der positiven  $x$ -Achse. Dann sind in  $S_i(p)$  alle Punkte enthalten, für die der Winkel  $\varphi$  in dem Intervall

$$\frac{2\pi(i-1)}{k} \leq \varphi < \frac{2\pi(i)}{k}$$

liegt. Sofern die Punktmenge  $S_i(p)$  nicht leer ist, wird  $p$  mit jeweils einem bestimmten Punkt  $b$  aus jeder Region verbunden. Sei  $S_1(p)$  nicht leer. Dann geht von  $p$  eine gerichtete Kante zu einem Punkt  $b \in S_1(p)$ , dessen  $x$ -Koordinate die Bedingung

$$x(b) = \min\{x(q) \mid q \in S_1(p)\}$$

erfüllen muss. Gibt es mehrere Punkte mit minimaler  $x$ -Koordinate in  $S_1(p)$ , dann wird der Punkt mit der kleinsten  $y$ -Koordinate gewählt. Für die anderen Regionen ist die Bedingung ungeeignet. Sei daher  $q'$  die senkrechte Projektion eines Punktes  $q \in S_i(p)$  auf den bei  $p$  beginnenden Strahl mit Winkel  $2\pi(i-1)/k$ . Dann geht von  $p$  eine gerichtete Kante zu einem Punkt  $b$  genau dann, wenn  $b \in S_i(p)$  und für alle anderen Punkte  $q \in S_i(p)$  entweder

$$d(p, b') < d(p, q')$$

oder

$$d(p, b') = d(p, q') \quad \text{und} \quad d(b, b') < d(q, q')$$

gilt. Die gerichtete Kante  $(pb)$  wird *Typ  $i$ -Kante* genannt, wenn  $b$  in der Region  $S_i(p)$  liegt. Nachdem alle gerichteten Kanten eingefügt worden sind, werden sie zu ungerichteten Kanten transformiert. Somit ist  $\theta(S)$  ein ungerichteter Graph ist.

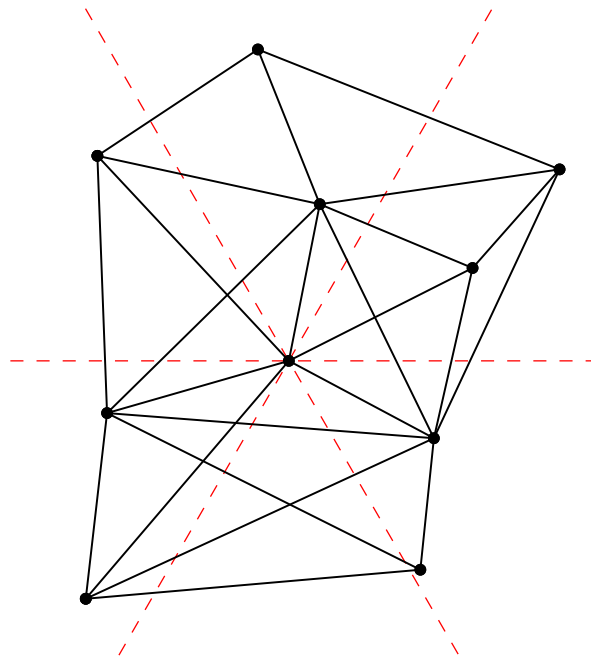


Abbildung 4.5:  $\theta(S)$  für  $\theta = 2\pi/k$  und  $k = 6$

Obwohl die  $\theta$ -Graphen im Allgemeinen nicht zur Klasse der planaren Graphen gehören, enthalten sie trotzdem nur eine lineare Anzahl an Kanten, da jeder Punkt jeweils mit maximal  $k$  Punkten verbunden wird. Mit einem Sweep-Algorithmus ist  $\theta(S)$  in Zeit  $O(n \log n)$  berechenbar. Näheres hierzu in [KG92].

### 4.3.2 Obere Schranke für die Dilation

Wie schon mehrfach angedeutet, ist die Dilation der  $\theta$ -Graphen abhängig von einer Zahl  $k$ , die für die Anzahl der Winkelintervalle steht. Mit größer werdendem  $k$  nimmt somit im Allgemeinen auch die Anzahl der enthaltenen Kanten zu, was sich auf die Dilation zweifelsohne positiv auswirkt. So geht die Dilation der  $\theta$ -Graphen gegen 1, wenn  $k$  gegen unendlich strebt. Der Beweis findet sich in [Kei88] und [KG92].

Sei  $\theta(S)$  der  $\theta$ -Graph von  $S$  für  $\theta = 2\pi/k$  und  $k > 8$ . Es wird nun gezeigt, dass dann

$$\delta_\theta(S) \leq \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{1}{1 - \tan \theta} \right)$$

gilt, wobei die Bedingung  $k > 8$  zur Folge hat, dass  $\theta < 45^\circ$  ist, wodurch  $\tan \theta < 1$  resultiert. Für den Beweis dieser oberen Schranke ist zunächst etwas technische Vorarbeit zu leisten. Seien  $p$  und  $q$  zwei beliebige Punkte aus  $S$ . Der kürzeste Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\theta(S)$  enthält  $m$  innere Punkte, mit  $0 \leq m \leq n - 2$ . Das folgende Lemma schränkt das Verhältnis  $d_\theta(p, q)/d(p, q)$  mit einer Funktion von  $m$  ein.

**Lemma 4.2** Sei  $\theta(S)$  der  $\theta$ -Graph einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene für  $\theta = 2\pi/k$  und  $k > 8$ , und seien  $p, q \in S$ . Wenn der kürzeste Pfad von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\theta(S)$  durch  $m$  innere Punkte verläuft, dann ist

$$\frac{d_\theta(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\tan^m \theta - 1}{\tan \theta - 1} \right) + \tan^m \theta.$$

**Beweis.** Sei  $s_j$  der  $j$ -te innere Punkt des kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten von  $\theta(S)$ , mit  $0 \leq j \leq m$  und  $s_0 = p$ . Weiter sei  $d_{\theta'}(p, q)$  die Länge des kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  unter der folgenden Einschränkung. Wenn der Winkel  $\varphi$  zwischen dem Liniensegment  $s_j q$  und der  $x$ -Achse im Intervall

$$\frac{2\pi(i-1)}{k} \leq \varphi < \frac{2\pi(i)}{k}$$

liegt, dann ist die Kante von  $s_j$  nach  $s_{j+1}$  im Pfad von  $p$  nach  $q$  eine Typ  $i$ -Kante. In der folgenden Abbildung wird diese Einschränkung von dem rot markierten Pfad berücksichtigt. Er ist etwas länger als der kürzeste Pfad von  $p$  nach  $q$ . Zwecks Übersichtlichkeit enthält die Abbildung lediglich die Knoten und Kanten der beiden zu vergleichenden Pfade. Für den Winkel  $\theta$  gilt  $\theta = 2\pi/16 = 22.5^\circ$ . Da

$$d_\theta(p, q) \leq d_{\theta'}(p, q)$$

hält das Lemma auch, wenn die Schranke für  $d_{\theta'}(p, q)$  bewiesen wird.

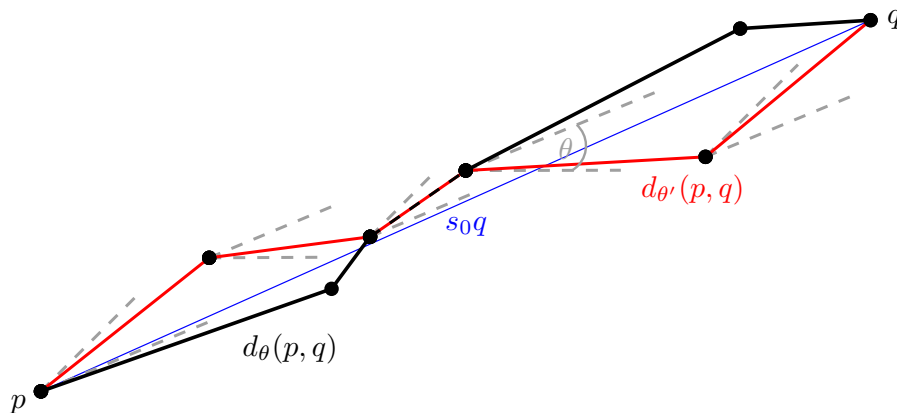


Abbildung 4.6: Vergleich zwischen  $d_\theta(p, q)$  und  $d_{\theta'}(p, q)$

Über die Variable  $m$  wird nun ein Induktionsbeweis geführt. Den Induktionsanfang stellt dabei  $m = 0$  dar. Dieser Fall ist trivial, denn der Pfad von  $p$  nach  $q$  enthält dann keine inneren Punkte, womit sich  $d_{\theta'}(p, q) = d(p, q)$  ergibt.

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass

$$\frac{d_{\theta'}(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\tan^{(m-1)} \theta - 1}{\tan \theta - 1} \right) + \tan^{(m-1)} \theta$$

gilt, wenn der kürzeste Pfad von  $p$  nach  $q$  unter obiger Einschränkung  $m - 1$  innere Punkte enthält.

Im Induktionsschritt muss nun gezeigt werden, dass aus der Induktionsvoraussetzung auch die Richtigkeit für  $m$  innere Punkte des eingeschränkten kürzesten Pfades von  $p$  nach  $q$  folgt. Da zwischen  $s_1$  und  $q$  in  $\theta(S)$   $m - 1$  innere Punkte existieren, ergibt sich zusammen mit der Induktionsvoraussetzung

$$d_{\theta'}(s_1, q) \leq d(s_1, q) \left[ \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\tan^{(m-1)} \theta - 1}{\tan \theta - 1} \right) + \tan^{(m-1)} \theta \right]$$

und folglich

$$d_{\theta'}(p, q) \leq d(p, s_1) + d(s_1, q) \left[ \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\tan^{(m-1)} \theta - 1}{\tan \theta - 1} \right) + \tan^{(m-1)} \theta \right]. \quad (4.1)$$

Sei die rechte Seite der Ungleichung (4.1) gleich  $d_{\theta''}(p, q)$ . Wegen

$$d_{\theta}(p, q) \leq d_{\theta'}(p, q) \leq d_{\theta''}(p, q)$$

hält das Lemma auch, wenn die Schranke für  $d_{\theta''}(p, q)$  bewiesen wird.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien  $p$  und  $q$  so angeordnet, dass der Winkel  $\varphi$  zwischen dem Liniensegment  $pq$  und der  $x$ -Achse innerhalb des Intervalls

$$0 \leq \varphi < \frac{2\pi}{k}$$

liegt. Dann ist auch die Lage von  $s_1$  derart, dass sich der Winkel  $\alpha$  zwischen dem Liniensegment  $ps_1$  und der  $x$ -Achse in dem Intervall

$$0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{k}$$

befinden muss. Um den Beweis nun weiter fortzuführen, benötigen wir genauere Informationen über die Lage der Punkte  $q$  und  $s_1$ . Mit Hilfe des folgenden Lemmas kann die Lage von  $q$  und  $s_1$  eingegrenzt werden. Der laufende Beweis von Lemma 4.2 wird im Anschluss zu Ende geführt.



**Lemma 4.3** *Das Verhältnis*

$$\frac{d_{\theta''}(p, q)}{d(p, q)}$$

erreicht seinen maximalen Wert, wenn sich  $p$  und  $q$  auf der  $x$ -Achse befinden und  $s_1$  so liegt, dass der Winkel  $\alpha$ , mit  $0 \leq \alpha < 2\pi/k$ , maximal ist.

**Beweis.** Es wird gezeigt, wie die beiden Punkte  $q$  und  $s_1$  zu den in Lemma 4.3 angegebenen Positionen bewegt werden können, ohne dabei den Wert des Verhältnisses  $d_{\theta''}(p, q)/d(p, q)$  zu verringern. Wenn man  $q$  und  $s_1$  so bewegt, dass die Werte von  $d(p, s_1)$  und  $d(s_1, q)$  sich einerseits nicht verringern und der Wert von  $d(p, q)$  sich andererseits nicht vergrößert, dann verringert sich auch nicht der Wert von  $d_{\theta''}(p, q)/d(p, q)$ .

Sind  $s_1$  und  $q$  derartig angeordnet, dass der Winkel  $\alpha$  kleiner ist als der Winkel  $\varphi$ , dann betrachten wir ihre Darstellung in Polarkoordinaten (Abbildung 4.7). Die Polarkoordinaten eines Punktes  $P$  bestehen aus dem Radius  $r$ , also dem Abstand des Punktes von einem gegebenen Nullpunkt  $O$ , und dem Polarwinkel  $\delta$ , d.h. dem Winkel zwischen dem Liniensegment  $OP$  und einem durch den Nullpunkt gehenden orientierten Strahl, der Polarachse. Für  $s_1$  ist die Darstellung in Polarkoordinaten somit  $(r_{s_1}, \alpha)$ , und für  $q$  ist sie  $(r_q, \varphi)$ . Wird der Punkt  $q$  nach  $(r_q, \alpha)$  bewegt und  $s_1$  nach  $(r_{s_1}, \varphi)$ , dann bleiben sowohl die Werte  $d(p, s_1) = r_{s_1}$  und  $d(p, q) = r_q$  erhalten, als auch der Wert von  $d(s_1, q)$ , womit der Wert des Verhältnisses  $d_{\theta''}(p, q)/d(p, q)$  ebenfalls unverändert bleibt. Nun ist  $\alpha \geq \varphi$ , wenn  $\alpha$  den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und dem Liniensegment  $ps_1$  darstellt und  $\varphi$  den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und dem Liniensegment  $pq$ .

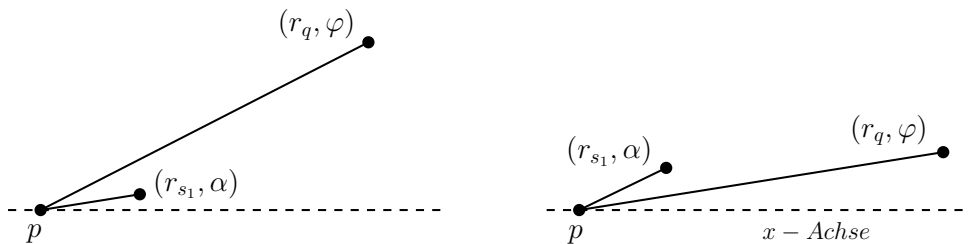


Abbildung 4.7: links:  $\alpha \leq \varphi$ , rechts:  $\alpha \geq \varphi$

Jetzt wird gezeigt, wie der Punkt  $q$  zur  $x$ -Achse bewegt werden kann (Abbildung 4.8). Dazu wird das Liniensegment  $s_1q$  einfach solange um  $s_1$  gedreht, bis  $q$  auf der  $x$ -Achse liegt. Durch diese Transformation bleiben die Werte von  $d(p, s_1)$  und  $d(s_1, q)$  abermals unverändert, im Gegensatz zum Wert von  $d(p, q)$ , der aber wegen  $\alpha \geq \varphi$  nicht größer werden kann.

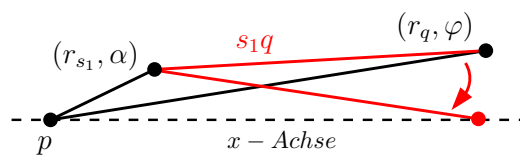


Abbildung 4.8: Bewegung von  $q$  in Richtung  $x$ -Achse

Um den Beweis abzuschließen, muss nun noch gezeigt werden, dass  $s_1$  so verschoben werden kann, dass sich der Winkel  $\alpha$  dem Wert  $2\pi/k$  nähert, ohne dabei das Verhältnis  $d_{\theta''}(p, q)/d(p, q)$  zu verringern (Abbildung 4.9). Dazu wird die  $y$ -Koordinate von  $s_1$  so weit wie möglich erhöht, wobei die Bedingung  $\alpha < 2\pi/k$  nicht verletzt werden darf.

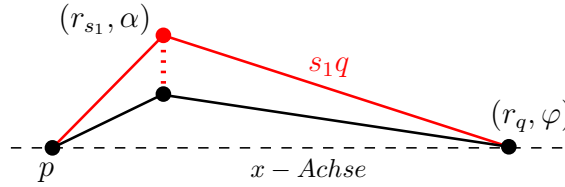


Abbildung 4.9: Maximierung des Winkels  $\alpha$ , mit  $0 \leq \alpha < 2\pi/k$

Da sowohl  $p$  als auch  $q$  auf der  $x$ -Achse liegen, bewirkt diese Transformation einen Zuwachs der Werte von  $d(p, s_1)$  und  $d(s_1, q)$ , was zu einem Zuwachs von  $d_{\theta''}(p, q)$  führt. Der Wert von  $d(p, q)$  bleibt bei dieser Transformation unberührt, so dass insgesamt ein Ansteigen des Verhältnisses von  $d_{\theta''}(p, q)/d(p, q)$  resultiert. ■

Jetzt geht es weiter mit dem Beweis von Lemma 4.2.

**Beweis von Lemma 4.2.** Wegen Lemma 4.3 ergibt sich für  $d(p, s_1)$  in Ungleichung (4.1) die Abschätzung

$$0 \leq d(p, s_1) < \frac{d(p, q)}{\cos \theta}.$$

Der Wert von  $d_{\theta''}(p, q)$  erreicht seinen maximalen Wert, wenn  $s_1$  so liegt, dass  $d(p, s_1)$  maximal ist. In diesem Fall haben  $q$  und  $s_1$  dieselbe  $x$ -Koordinate und man erhält

$$d(s_1, q) = d(p, q) \tan \theta.$$

Somit folgt

$$d_{\theta''}(p, q) \leq \frac{d(p, q)}{\cos \theta} + d(p, q) \tan \theta \left[ \frac{1}{\cos \theta} \left( \sum_{i=0}^{m-2} \tan^i \theta \right) + \tan^{(m-1)} \theta \right]$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d_{\theta''}(p, q)}{d(p, q)} &\leq \frac{1}{\cos \theta} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \tan^i \theta \right) + \tan^m \theta \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{\tan^m \theta - 1}{\tan \theta - 1} \right) + \tan^m \theta, \end{aligned}$$

womit der Beweis vollbracht ist. ■

Die bewiesene Schranke ist nicht sehr scharf, da  $d_\theta(p, q)$  stets kleiner sein dürfte als  $d_{\theta''}(p, q)$ . Vom Autor des Artikels wird vermutet, dass es für  $m > 2$  nicht mehr möglich ist in einer Punktmenge zwei Punkte zu finden mit  $d_\theta(p, q) = d_{\theta''}(p, q)$ .

**Theorem 4.4** Sei  $\theta(S)$  der  $\theta$ -Graph einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene für  $\theta = 2\pi/k$  und  $k > 8$ , und seien  $p, q \in S$ . Dann gilt für die Dilation

$$\delta_\theta(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_\theta(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{1}{1 - \tan \theta} \right).$$

**Beweis.** Wegen  $k > 8$  folgt  $\theta < 45^\circ$  und  $\tan \theta < 1$ . Dadurch wächst die in Lemma 4.2 angegebene Schranke kontinuierlich mit größer werdendem  $m$ , also der Anzahl innerer Punkte auf dem kürzesten Pfad von  $p$  nach  $q$ . Strebt  $m$  gegen unendlich, dann ergibt sich die Schranke aus Theorem 4.4. ■

Wie zu Beginn des Abschnitts bereits erwähnt, geht die Schranke

$$B = \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{1}{1 - \tan \theta} \right)$$

mit  $\theta = 2\pi/k$  gegen 1, wenn  $k$  entsprechend groß wird. Die folgende Tabelle illustriert diesen Sachverhalt für einige Beispielwerte.

<b>k</b>	10	15	20	25	30	35	40	50	60	80	100	200
<b>B</b>	4.52	1.97	1.56	1.39	1.30	1.24	1.20	1.15	1.12	1.09	1.07	1.03

Diese Entwicklung ist nicht sehr verwunderlich, da die Anzahl der Kanten zunimmt, wenn  $k$  größer wird, und mit zunehmender Kantenzahl werden die Pfade zwischen zwei Punkten im Allgemeinen kürzer.

Im nächsten Abschnitt wird eine weitere Graphklasse betrachtet, bei der die Dilation abhängig ist von einem Parameter, der die Konstruktion der Graphen beeinflusst.

## 4.4 $\beta$ -Skeletons

Wie bei den im vorigen Abschnitt behandelten  $\theta$ -Graphen ist auch bei den  $\beta$ -Skeletons die Dilation abhängig von einer weiteren Größe. Je nach Wert des Parameters  $\beta$  ergeben sich unterschiedliche Ausprägungen und Spezialfälle. So entsteht für  $\beta = 1$  der *Gabriel Graph*, für  $\beta = 2$  der *Relative Neighborhood Graph* und die  $\beta$ -Skeletons mit  $\beta > 2$  sind nicht mehr zusammenhängend.

### 4.4.1 Definition

Gegeben sei eine Punktmenge  $S$  in der Ebene. Dann werden zwei Punkte genau dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn sich in einem gewissen Einflussbereich der beiden Punkte keine weiteren Punkte aus  $S$  befinden. Zur Bestimmung des Einflussbereiches, der offen oder geschlossen sein kann, kommt nun der Parameter  $\beta$  zum Tragen. Mit größer werdendem  $\beta$  wächst der Einflussbereich und die Anzahl der Kanten wird geringer.

Der Einflussbereich zweier Punkte  $p, q \in S$  wird durch die sogenannte  $\beta$ -Region festgelegt und mit  $R(p, q, \beta)$  bezeichnet. Für  $\beta = 0$  ist die  $\beta$ -Region  $R(p, q, 0)$  gerade das Liniensegment  $pq$ . Abgesehen von dem Spezialfall, dass mehrere Punkte aus  $S$  auf einer Geraden liegen, entsteht in diesem Fall also ein vollständiger Graph.

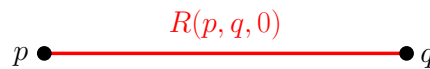


Abbildung 4.10:  $\beta$ -Region für  $\beta = 0$

Befindet sich  $\beta$  in dem Intervall  $]0, 1[$ , dann ist  $R(p, q, \beta)$  definiert als der Durchschnitt der beiden Kreise mit Radius  $d(p, q)/2\beta$ , deren Ränder  $p$  und  $q$  enthalten.

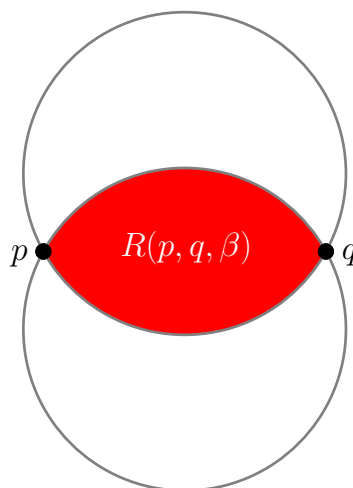


Abbildung 4.11:  $\beta$ -Region für  $\beta \in ]0, 1[$

Der Einflussbereich wird mit steigendem  $\beta$  größer. Strebt  $\beta$  gegen 0, dann nähert sich  $R(p, q, \beta)$  dem Liniensegment  $pq$ , und strebt  $\beta$  gegen 1, dann wird der Radius kleiner, was dazu führt, dass sich die Kreismittelpunkte aufeinander zu bewegen.

Für  $\beta = 1$  ergibt sich der Gabriel Graph, dessen  $\beta$ -Region  $R(p, q, 1)$  aus dem geschlossenen Kreis mit Durchmesser  $pq$  besteht, da die beiden Kreismittelpunkte identisch sind.

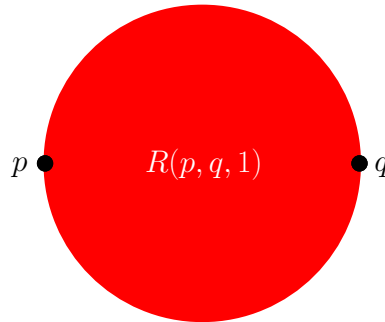


Abbildung 4.12:  $\beta$ -Region für  $\beta = 1$

Wenn  $\beta$  im Intervall  $[1, \infty[$  liegt, dann ist die  $\beta$ -Region  $R(p, q, \beta)$  definiert als der Durchschnitt der beiden Kreise mit Radius  $\beta d(p, q)/2$ , deren Kreismittelpunkte durch  $(1 - \beta/2)p + (\beta/2)q$  und  $(\beta/2)p + (1 - \beta/2)q$  gegeben sind. Sie befinden sich auf der Geraden durch die Punkte  $p$  und  $q$  und bewegen sich mit größer werdendem  $\beta$  voneinander weg, wodurch der Einflussbereich wächst. Wenn  $\beta > 2$  ist, dann wird  $R(p, q, \beta)$  allerdings so groß, dass  $p$  und  $q$  immer darin enthalten sind und die Kanten sich gegenseitig blockieren. Die  $\beta$ -Skeletons sind dann nicht mehr zusammenhängend.

Für  $\beta = 2$  sind die  $\beta$ -Skeletons gerade noch zusammenhängend. Die  $\beta$ -Region  $R(p, q, 2)$  besteht in diesem Fall aus dem offenen Durchschnitt der beiden Kreise mit Radius  $pq$ , deren Kreismittelpunkte genau die Punkte  $p$  und  $q$  sind. Der so entstehende Graph wird als Relative Neighborhood Graph bezeichnet. Ein Beispiel hierfür ist eine Punktmenge  $S$ , bestehend aus drei Punkten, die jeweils den gleichen Abstand voneinander haben. Die Punkte liegen dann auf dem Rand der Vereinigung aller drei geschlossenen Einflussbereiche, was aber zu keiner Kantenblockierung führt, da die Einflussbereiche des Relative Neighborhood Graphen offen sind.

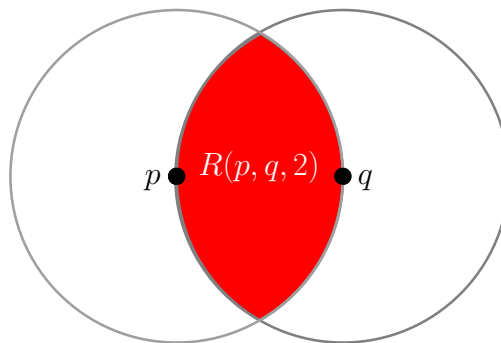


Abbildung 4.13:  $\beta$ -Region für  $\beta = 2$

Da die  $\beta$ -Regionen mit steigendem  $\beta$  größer werden, nimmt zum Einen die Anzahl der Kanten ab, und zum Anderen sind dadurch alle  $\beta$ -Skeletons Teilgraphen der  $\beta$ -Skeletons mit kleinerem  $\beta$ . Somit gilt für die Graphen einer endlichen Punktmenge  $S$  folgende Beziehung [BDEK02].

Minimaler Spannbaum  
 $\subseteq$  Relative Neighborhood Graph  
 $\subseteq$  Gabriel Graph  
 $\subseteq$  Delaunay-Triangulation

#### 4.4.2 Obere Schranke für die Dilation

Aufgrund der verschiedenen Ausprägungen, die sich in Abhängigkeit der Werte von  $\beta$  für die  $\beta$ -Skeletons ergeben, ist eine separate Betrachtung der einzelnen Intervalle unabdinglich, um möglichst scharfe obere Schranken für die Dilation zu erhalten. In dem Artikel „On the spanning ratio of Gabriel graphs and  $\beta$ -skeletons“ von Prosenjit Bose, Luc Devroye, William Evans und David Kirkpatrick [BDEK02] werden für die relevanten Intervalle und Werte von  $\beta$  obere Schranken präsentiert und bewiesen.

Der Fall  $\beta > 2$  ist schnell abgehandelt, da die resultierenden  $\beta$ -Skeletons nicht mehr zusammenhängend sind und die Dilation infolgedessen definitionsgemäß unendlich ist. Somit verbleibt der Bereich  $[0, 2]$ . Der Fall  $\beta = 0$  ist ebenfalls trivial, da der Pfad entlang den Kanten dem euklidischen Abstand entspricht, wodurch die Dilation immer den optimalen Wert 1 hat. Es folgt nun eine generelle obere Schranke für den relevanten Bereich  $[0, 2]$ .

**Theorem 4.5** *Sei  $\beta(S)$  der  $\beta$ -Skeleton einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene mit  $\beta \in [0, 2]$ , und seien  $p, q \in S$ . Dann gilt für die Dilation*

$$\delta_\beta(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_\beta(p, q)}{d(p, q)} \leq n - 1.$$

**Beweis.** Hier erweist sich die Eigenschaft als nützlich, dass der minimale Spannbaum von  $S$  in  $\beta(S)$  mit  $\beta \in [0, 2]$  enthalten ist. Die Betrachtung des minimalen Spannbaums ist daher für den weiteren Verlauf des Beweises ausreichend. Sei  $d_{mS}(p, q)$  die Länge des Pfades von  $p$  nach  $q$  entlang den Kanten des minimalen Spannbaums. Dann besteht  $d_{mS}(p, q)$  aus  $n - 1$  Kanten, die jeweils höchstens die Länge  $d(p, q)$  haben. Andernfalls wäre die Summe der Kantenlängen nicht minimal, was der Definition eines minimalen Spannbaums widersprechen würde. Daher folgt

$$d_{mS}(p, q) \leq (n - 1) d(p, q) \implies \frac{d_\beta(p, q)}{d(p, q)} \leq n - 1,$$

womit der Beweis vollbracht ist, denn wenn die Schranke für den minimalen Spannbaum von  $S$  hält, dann erst recht für  $\beta(S)$  mit  $\beta \in [0, 2]$ . ■

Eine schärfere obere Schranke gibt es für den Bereich  $[0, 1]$ . Der Beweis ist allerdings sehr umfangreich, weshalb wir uns lediglich auf die Angabe der dahinterstehenden Idee beschränken.

**Theorem 4.6** Sei  $\beta(S)$  der  $\beta$ -Skeleton einer  $n$ -elementigen Punktmenge  $S$  in der Ebene mit  $\beta \in [0, 1]$ , und seien  $p, q \in S$ . Dann gilt für die Dilation

$$\delta_\beta(S) = \max_{p, q \in S} \frac{d_\beta(p, q)}{d(p, q)} \leq \frac{4\pi(6n - 12)^\gamma}{3\sqrt{3}},$$

wobei

$$\gamma = \frac{1 - \log_2(1 + \sqrt{1 - \beta^2})}{2}.$$

**Beweis.** Der Beweis gliedert sich in drei Teile. Dabei wird von der Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass der Gabriel Graph - also der  $\beta$ -Skeleton mit  $\beta = 1$  - ein Teilgraph der Delaunay-Triangulation ist.

1. Zunächst wird gezeigt, dass es zwischen den Endpunkten jeder Delaunay-Kante  $p'q'$  einen Weg entlang den Kanten des  $\beta$ -Skeletons gibt. Entweder handelt es sich bei der Delaunay-Kante  $p'q'$  einfach um eine Kante des  $\beta$ -Skeletons, oder  $p'q'$  wird rekursiv in weitere Delaunay-Kanten zerlegt, bis der Weg schließlich aus lauter Kanten des  $\beta$ -Skeletons besteht, wobei Kanten durchaus mehrfach durchlaufen werden können.
2. Im zweiten Schritt wird eine obere Schranke für die Länge des Weges von  $p'$  nach  $q'$  als ein Vielfaches von  $d(p', q')$  bestimmt, wobei  $p'q'$  eine Delaunay-Kante ist. Sei  $m$  die Anzahl der Kanten des Weges. Dann gilt

$$|\text{Weg}(p', q')| \leq m^\gamma d(p', q')$$

mit

$$\gamma = \frac{1 - \log_2(1 + \sqrt{1 - \beta^2})}{2}.$$

Dabei besteht der Weg von  $p'$  nach  $q'$  aus höchstens  $6n - 12$  Kanten, was unter Anwendung der Eulerschen Formel gezeigt werden kann.

3. Als letztes wird die obere Schranke aus Schritt 2 mit der kleinsten bekannten oberen Schranke für die Dilation von Delaunay-Triangulationen aus Abschnitt 3.1.3 kombiniert. Zur Erinnerung, diese hatte den Wert

$$\delta_{DT}(S) \leq \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 2.42.$$

Es folgt

$$\delta_\beta(S) \leq \frac{2\pi}{3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} (6n - 12)^\gamma = \frac{4\pi(6n - 12)^\gamma}{3\sqrt{3}},$$

wegen  $2 \cos(\pi/6) = \sqrt{3}$ . ■

Die Betrachtung weiterer Graphklassen, die einen vollständigen Graphen bezüglich der Dilation gut approximieren, könnte an dieser Stelle fortgesetzt werden. Allerdings lässt der Rahmen dieser Diplomarbeit das nicht mehr zu. Im nächsten Kapitel werden noch einige interessante offene Fragen und Probleme angesprochen.

# Kapitel 5

## Ausblick und offene Fragen

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden für verschiedene Graphklassen möglichst scharfe obere Schranken für den Wert der graphtheoretischen Dilation aus der Literatur zusammengetragen. Dabei ist hauptsächlich die Graphklasse der Delaunay-Triangulationen basierend auf drei verschiedenen Metriken näher untersucht worden. Es stellte sich heraus, dass die Qualität der Ergebnisse in Abhängigkeit der Metrik stark variiert. In diesem Kontext ist nun vor allem die Frage von Belang, inwieweit die bewiesenen Schranken noch verbessert werden können.

- Liegt in der euklidischen Metrik  $\Delta_{DT} \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3 \cos(\frac{\pi}{6})} \approx 2.42 \right]$  nahe bei  $\pi/2$ ?
- In der  $L_1$ -Metrik ist die größte bekannte untere Schranke für  $\Delta_{L_1-DT}$  mit 2 weit von der kleinsten bekannten oberen Schranke mit  $\sqrt{10}$  entfernt. Wie kann diese Lücke verkleinert oder sogar ganz geschlossen werden?
- In der  $\Delta$ -Metrik existiert mit  $\Delta_{\Delta-DT} = 2$  eine optimale Schranke. Gibt es überhaupt planare Graphklassen mit einer geringeren Dilation im worst case?

Weder bei den Delaunay-Triangulationen noch bei den anderen in dieser Diplomarbeit behandelten Graphklassen ist die Gradzahl der Knoten beschränkt. Hier wäre es interessant zu wissen, ob es Graphklassen mit beschränkter Gradzahl gibt, bei denen die Dilation eine gewisse Konstante nicht überschreitet. Gibt es überhaupt eine solche Konstante? Wie klein kann diese werden?

Die Berechnungskomplexität der Dilation liefert weitere offene Probleme. Wie kann die Dilation eines Graphen möglichst effizient berechnet werden? Wie schnell lässt sich für eine gegebene Punktmenge ein planarer Graph mit minimaler Dilation bestimmen? Wie schnell kann für eine gegebene Punktmenge und einen gegebenen Wert  $d$  für die Dilation der zugehörige - nicht notwendigerweise planare - Graph mit minimaler Kantenzahl und  $\delta_G \leq d$  konstruiert werden? Wie wirkt sich die Hinzunahme weiterer Kanten und Knoten auf die Dilation eines Graphen möglichst positiv aus?

Eine Ausdehnung der Diskussion über den 2-dimensionalen Raum hinaus liefert ebenfalls offene Fragen. Können die Ergebnisse in gewisser Weise auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden? Wie ist das Verhalten insbesondere im 3-dimensionalen Raum?

Aufgrund zunehmender Forschungsaktivitäten können vielleicht schon bald einige der hier gestellten Fragen beantwortet werden.



# Literaturverzeichnis

- [BDEK02] P. Bose, L. Devroye, W. Evans, D. Kirkpatrick. On the spanning ratio of Gabriel graphs and  $\beta$ -skeletons. *Proceedings of the 5th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN 2002)*, LNCS 2286, Springer-Verlag, Berlin, 479-493, 2002.
- [Bra94] Andreas Brandstädt. Graphen und Algorithmen. B. G. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [BSMM95] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig. Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2. Auflage, 1995.
- [Che86] L. Paul Chew. There is a planar graph almost as good as the complete graph. *Proceedings of the 2. Symposium on Computational Geometry, Yorktown Heights, NY, 169-177, 1986.*
- [Che89] L. Paul Chew. There are planar graphs almost as good as the complete graph. *Journal of Computer and System Sciences* 39, 205-219, 1989.
- [DFS90] D. P. Dobkin, S. J. Friedman and K. J. Supowit. Delaunay graphs are almost as good as complete graphs. *Discrete Computational Geometry*, 5:399-407, 1990.
- [DJ89] G. Das and D. Joseph. Which triangulations approximate the complete graph? *Proceedings of the International Symposium on Optimal Algorithms, LNCS 401, Springer-Verlag, Berlin, 168-192, 1989.*
- [Dry90] Robert. L. Drysdale. A practical algorithm for computing the Delaunay triangulation for convex distance functions. *Proceedings of the 1. ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 159-168, 1990.
- [Epp96] David Eppstein. Beta-skeletons have unbounded dilation. *Technical Report 96 - 15, Department of Information and Computer Science, University of California, Irvine, CA 92717, 1996.*
- [Epp99] David Eppstein. Spanning trees and spanners. *J.-R Sack and J. Urrutia, Handbook of Computational Geometry, Chapter 9, 425-461, 1999.*
- [Jun94] Dieter Jungnickel. Graphen, Netzwerke und Algorithmen. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, 1994.
- [Kei88] J. M. Keil. Approximating the complete Euclidean graph. *Proceedings of the 1st Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT 88)*, LNCS 318, Springer-Verlag, Berlin, 208-213, 1988.

- [KG89] J. M. Keil and C. A. Gutwin. The Delaunay triangulation closely approximates the complete Euclidean graph. *Proceedings of the Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS '89), LNCS 382, Springer-Verlag, Berlin, 47-56, 1989.*
- [KG92] J. M. Keil and C. A. Gutwin. Classes of graphs which approximate the complete Euclidean graph. *Discrete Computational Geometry, 7:13-28, 1992.*
- [Kle88] Rolf Klein. Voronoi-diagrams in the Moscow metric (extended abstract). *Proceedings of the International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG '88), LNCS 344, Springer-Verlag, Berlin, 434-441, 1988.*
- [Kle89] Rolf Klein. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams, LNCS 400, Springer-Verlag, Berlin, 1989.*
- [Kle97] Rolf Klein. Algorithmische Geometrie. *Addison-Wesley, Bonn, 1997.*
- [KW88] R. Klein and D. Wood. Voronoi diagrams based on general metrics in the plane (extended abstract). *Proceedings of the 5th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 88), LNCS 294, Springer-Verlag, Berlin, 281-291, 1988.*
- [Lee80] D. T. Lee. Two-dimensional Voronoi diagrams in the  $L_p$  metric. *Journal on ACM, 27:604-608, 1980.*
- [LL89] C. Levcopoulos and A. Lingas. There are planar graphs almost as good as the complete graphs and as short as minimum spanning trees. *Proceedings of the International Symposium on Optimal Algorithms, LNCS 401, Springer-Verlag, Berlin, 9-13, 1989.*
- [Lor04] S. Lorenz. Der Spanning Ratio in  $\beta$ -Skeletons. *Seminararbeit, Institut für Informatik, Abteilung I, Universität Bonn, 2004.*
- [LW80] D. T. Lee and C. K. Wong. Voronoi diagrams in  $L_1$  ( $L_\infty$ ) metrics with 2-dimensional storage applications. *SIAM Journal on Computing, 9:200-211, 1980.*
- [MM00] C. Meinel und M. Mundhenk. Mathematische Grundlagen der Informatik. *B. G. Teubner, Stuttgart/Leipzig, 2000.*
- [NS00] G. Narasimhan and M. Smid. Approximating the stretch factor of Euclidean graphs. *SIAM Journal on Computing, 30:978-989, 2000.*
- [Yao82] A. C. Yao. On constructing minimum spanning trees in  $k$ -dimensional spaces and related problems. *SIAM Journal on Computing, 11:721-736, 1982.*

# Index

- $CG$ , 49
- $CL_1-DT(R)$ , 60
- $C\Delta-DT(R)$ , 77
- $DT(S)$ , 9, 14
- $G = (V, E)$ , 7
- $L_1-DT(S)$ , 49
- $L_1-DT(S)'$ , 50
- $L_1$ -Delaunay-Triangulation, 47
- $L_1$ -Einheitskreis, 46
- $L_1$ -Kreis, 46
- $L_1$ -Metrik, 46
- $L_1$ -Voronoi-Diagramm, 47
- $L_1(p, q)$ , 46
- $L_i(p, q)$ , 11
- $Lune(C_1, C_2)$ , 38
- $R(p, q, \beta)$ , 91
- $VD(S)$ , 8
- $VR(p, S)$ , 8
- $\Delta_{DT}$ , 14
- $\beta$ -Region, 91
- $\beta$ -Skeleton, 80, 91
- $\delta_G$ , 10
- $\delta_G(p, q)$ , 10
- $\delta_\beta(S)$ , 93, 94
- $\delta_\theta(S)$ , 90
- $\delta_{DT}(S)$ , 14, 15, 20, 37
- $\delta_{L_1-DT}(S)$ , 48, 58
- $\delta_{TG}(S)$ , 83
- $\delta_{\Delta-DT}(S)$ , 63
- $\delta_{\Delta-DT}(S)$ , 71
- $\theta$ -Graph, 80, 84
- $\theta(S)$ , 84
- $\Delta-DT(S)$ , 63
- $\Delta-DT(S)'$ , 65
- $\Delta$ -Delaunay-Dreieck, 62
- $\Delta$ -Delaunay-Kante, 62
- $\Delta$ -Delaunay-Triangulation, 61
- $\Delta$ -Einheitskreis, 61
- $\Delta$ -Kreis, 62
- $\Delta$ -Metrik, 61
- $\Delta$ -Voronoi-Region, 62
- $d(p, q)$ , 10
- $d_G(p, q)$ , 14
- $d_{DT}(p, q)$ , 14
- Abkürzung, 20, 22
- adjazent, 7
- Algorithmus 1, 50
- Algorithmus 2, 65
- Algorithmus von Dijkstra, 59
- Berechnungskomplexität, 95
- Bisektor, 9
- Circle-Graph, 48, 64
- Constrained  $\Delta$ -Delaunay-Triangulation, 77
- Constrained  $L_1$ -Delaunay-Triangulation, 60
- Delaunay-Triangulation, 5, 9, 13, 14, 82
- Delaunay-Zerlegung, 10
- detour over vertices, 11
- diamond property, 80, 82
- Dilation, 5, 11, 13–15, 77, 82
  - geometrische  $\sim$ , 5, 10
  - graphtheoretische  $\sim$ , 5, 10
- direkter  $DT$ -Pfad, 16, 19
  - $\sim$  einseitig, 16, 19
  - $\sim$  nicht einseitig, 16, 19
- direktes  $DT$ -Pfadstück, 24
- distortion, 11
- Dreieck-Metrik, 61
- Dreiecksungleichung, 11
- dual, 10
- Einflussbereich, 91
- Einheitskreis, 11
- erweiterte Pfadstellen, 54
- euklidische Metrik, 11, 13
- euklidischer Abstand, 10
- Fixed-Angle  $\theta$ -Graph, 84
- Gabriel Graph, 91, 92
- gerichteter Graph, 7
- good polygon property, 80
- Grad eines Kontens, 7

- Graph, 7
- Induktionsbeweis, 18, 34, 40, 87
- inzident, 7
- Kante, 7
- Kantengewichtsfunktion, 8
- Knoten, 7
- konvex, 9
- konvexe Distanzfunktion, 12
- konvexe Hülle, 9
- Kosinussatz, 32
  
- Länge eines Pfades, 8
- Länge eines Weges, 8
  
- Manhattan-Metrik, 11, 46
- Metrik, 11
- minimaler Spannbaum, 9, 83, 93
- Minkowski-Metriken, 11
  
- Norm, 11
- Nullpunkt, 11
  
- obere Schranke, 77
- optimale Schranke, 76
  
- Pfad, 8
- planarer Graph, 8
- Problem des Handlungsreisenden, 83
  
- Relative Neighborhood Graph, 91, 92
  
- shortcut condition, 21, 82
- Sichtbarkeits-Graph, 59
- Sinussatz, 41
- spanning ratio, 11
- streng konvexe Distanzfunktion, 12
- stretch faktor, 11
- Symmetriebedingung, 11, 61
- symmetrische konvexe Distanzfunktion, 11
  
- trade off, 83
- transformierter Kreis, 33
- Triangulation
  - greedy-  $\sim$ , 82
  - min-max angle-  $\sim$ , 82
  - min-max edge length-  $\sim$ , 82
  - minimum weight-  $\sim$ , 82
- Triangulation einer Punktmenge, 9
  
- unendlicher Graph, 7
- ungerichteter Graph, 7
  
- untere Schranke, 14, 77
- vollständiger Graph, 7
- Voronoi-Diagramm, 8, 10
- Voronoi-Kante, 9, 10
- Voronoi-Knoten, 9
- Voronoi-Region, 8, 10
  
- Weg, 8
- worst-case, 69